Е. А. ТОМИЛОВ

Теоретическая МЕХАНИКА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТОМСК 1966

Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. В. КУЙБЫШЕВА

Е. Д. ТОМИЛОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ч. 1

КУРС ЛЕКЦИЙ

(ДЛЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ УНИВЕРСИТЕТОВ)

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1966

Редактор проф. П. П. Кубарев

ОГЛАВЛЕНИЕ

		Стр.
	Предисловие	3
	Введение	6
§ 1.	Предмет и значение теоретической механики	—
§ 2.	Краткие исторические сведения	7
§ 3.	О пространстве и времени	15
	А. КИНЕМАТИКА	17
§ 4.	Вводные понятия	18
	Глава 1	
	Кинематика точки	21
§ 5.	Способы определения положения точки	—
§ 6.	Скорость точки	25
§ 7.	Ускорение точки	37
	Глава 2	
	Кинематика абсолютно твердого тела	47
§ 8.	Некоторые общие сведения и простейшие виды движения твердого тела	—
§ 9.	Плоско-параллельное движение твердого тела	53
§ 10.	Движение твердого тела вокруг неподвижной точки	70
§ 11.	Общий случай движения свободного твердого тела	77
	Глава 3	
	Кинематика сложного движения	80
§ 12.	Сложное движение точки	—
§ 13.	Основные сведения по теории скользящих векторов	85
§ 14.	Сложное движение твердого тела	100
	Б. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ	113
§ 15.	Законы Ньютона	—
§ 16.	Связи и аксиома связей. Идеальные связи	117
	В. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА	120
§ 17.	Общие положения и аксиомы статики. Трение скольжения и качения. Система сходящихся сил	—
§ 18.	Параллельные силы. Пара сил	130

§ 19. Произвольная система сил. Частные случаи . . 133
§ 20. Центр тяжести и центр масс 148

Г. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ 166

Глава 1

Движение свободной материальной точки . . . . . —
§ 21. Дифференциальные уравнения движения и две задачи динамики —
§ 22. Общие теоремы динамики 172
§ 23. Потенциальное поле сил и интеграл энергии 184
§ 24. Прямолинейное движение точки. Гармонические колебания . . 199
§ 25. Криволинейное движение точки. Центральные силы . . . 219

Глава 2

Движение несвободной материальной точки . 234
§ 26. Общие сведения. Движение по поверхности . —
§ 27. Движение материальной точки по линии . 255

Глава 3

Динамика относительного движения и основы релятивистской механики 271
§ 28. Относительное движение и равновесие материальной точки . —
§ 29. Основы релятивистской механики 285
Литература 302

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс теоретической механики в течение большого числа лет читался автором на механико-математическом факультете Томского государственного университета. Данное изложение представляет собой курс лекций по этому предмету в том виде, в каком он сложился в последние годы.

Автор отдает себе отчет, что в связи с последними установками о содержании курса теоретической механики, принятыми вторым съездом механиков в феврале 1964 года и отвечающим им сокращением числа часов, отводимых на этот курс в новых учебных планах механико-математических факультетов, данное изложение является слишком полным. Однако автор надеется, что предлагаемое им руководство будет полезным пособием, в котором можно найти все, что преподается в университетах по данному предмету, а также дополнительный материал, позволяющий студенту в порядке самостоятельной работы расширить свои знания по механике.

Практика преподавания теоретической механики показала необходимость некоторой перестановки материала по сравнению с обычно применяемым порядком. Так, в данном руководстве аналитическая статика излагается не вслед за геометрической, а несколько позднее, после динамики точки, когда более подготовленные в математическом отношении студенты оказываются в состоянии значительно быстрее и лучше усвоить этот раздел. Кроме того, это представляется и более естественным, ибо по своему содержанию аналитическая статика есть часть механики системы, поэтому представляется целесообразным изучать аналитическую статику непосредственно перед динамикой системы.

Точно так же вопросы устойчивости равновесия и движения, а также теория малых движений рассматриваются не

сразу после уравнений Лагранжа, а отнесены к концу курса. Это вызвано, с одной стороны, тем, что для успешного решения задач по этим вопросам необходимо знать теорию моментов инерции, излагаемую в динамике твердого тела. С другой же стороны, по достаточной математической сложности этого раздела, а частично — и по его содержанию, целесообразно объединить его с такими тоже более сложными вопросами, как канонические уравнения и вариационные принципы механики, поставив их в конце курса в виде дополнительных глав динамики системы. Это и сделано в данном руководстве.

Предполагая, что студенты имеют необходимую математическую подготовку, автор не рассматривает чисто математические вопросы, за исключением некоторых сведений, касающихся векторов и тензоров, и обычно мало или совсем неизвестных студентам к моменту изучения соответствующих вопросов механики. Основные сведения по теории скользящих векторов даны перед кинематикой сложного движения тела в объеме, позволяющем далее в кратком виде изложить как этот отдел кинематики, так и геометрическую статику.

Считая, что изложение кинематики, как вводного отдела, должно быть максимально сокращено, автор опустил все теоремы о конечных перемещениях тела в различных случаях его движения, ибо вполне можно обойтись без этих теорем.

Мелким шрифтом напечатаны примеры, а также сведения, имеющие характер дополнений к основному содержанию курса.

Нумерация формул дается отдельно для каждого параграфа, причем нумеруются только особо важные выражения или те, на которые делаются ссылки в других местах курса. Если ссылка дается на формулу, находящуюся в другом параграфе, то перед номером формулы ставится номер параграфа, если же она относится к формуле данного параграфа, то номер параграфа опускается.

Наряду с цифровой нумерацией применяется буквенная. Она применяется только внутри данного пункта какого-либо параграфа в том случае, когда нужно делать ссылки на формулы этого пункта.

Первая часть курса содержит, помимо введения и некоторых общих вопросов, кинематику, геометрическую статику и динамику точки. Вторая часть может быть названа механикой системы материальных точек и состоит из аналитической статики, общей части динамики системы, динамики твердого тела, теории удара и дополнительных глав динамики системы.

В заключение хочу выразить глубокую признательность члену-корреспонденту Академии наук СССР профессору А. И. Лурье, прочитавшему первый вариант рукописи первой части и сделавшему ряд ценных указаний, использованных мною при составлении окончательного текста.

Точно так же я хочу поблагодарить заведующего кафедрой теоретической механики Новосибирского электротехнического института профессора П. М. Алабужева и сотрудников его кафедры В. Ф. Хон и Л. М. Минкевича за составление отзыва о рукописи и сделанные замечания, также учтенные мною.

Выражаю свою благодарность профессору Томского университета П. П. Куфареву, взявшему на себя большой труд по редактированию данного руководства.

Благодарю сотрудников кафедр теоретической механики и теоретической физики Томского университета, принявших участие в просмотре и обсуждении отдельных частей книги.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предмет и значение теоретической механики

Существующий материальный мир находится в непрерывном изменении или движении вообще. Материя и движение неразрывно связаны друг с другом, образуют единство в философском смысле этого слова. «Подобно тому, как нет движения без материи, так нет материи без движения», — говорит Ф. Энгельс в «Диалектике природы».

Всякий же наблюдаемый нами покой относителен. Так, покоящееся на Земле тело неподвижно лишь по отношению к земной поверхности, в действительности же оно участвует во всех движениях этой поверхности.

Существуют различные формы движения материи. Наряду с движением в виде перемещения тел в пространстве имеют место химические, тепловые, внутриатомные, биологические и другие формы движения. Изучением каждой из этих форм занимается та или иная специальная наука.

Теоретическая механика ставит своей задачей изучение простейших из этих форм, именно изучение перемещения тел в пространстве с течением времени. Такая форма движения называется механическим движением.

Данное тело всегда одновременно участвует в нескольких формах движения. В самом деле, в движущемся теле происходят молекулярные движения, химические и некоторые другие изменения. Чтобы установить наиболее общие законы механического движения, теоретическая механика отвлекается от всех других видов движения, происходящих в теле, и вообще от всяких физических свойств тел, кроме их размеров и массы, а иногда только массы; в ней поэтому изучается движение таких идеализированных объектов, как материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело.

Такая идеализация изучаемых объектов делает возможным плодотворное применение в механике математики, в том числе достаточно сложных ее разделов. Само развитие механики

проходило в тесной связи с развитием математики, которое в большой степени стимулировалось требованиями, предъявлявшимися к ней механикой. Такие важнейшие отделы математики, как дифференциальное и интегральное исчисления, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения, математическая физика и другие, развивались в значительной мере в связи с потребностями механики, приводившими к формулировке и необходимости математического решения тех или иных задач.

Теоретическая механика имеет фундаментальное значение для науки и техники. На ее законах основываются такие выделившиеся из нее крупнейшие научные области, как механика деформируемых твердых тел и гидромеханика с их многочисленными разделами. Физика, астрономия, в частности небесная механика, также в значительной мере основываются на выводах теоретической механики. Многие технические науки, такие, как теория машин и механизмов, сопротивление материалов, строительная механика, теория гироскопов и другие, опираются в первую очередь на выводы теоретической механики, что делает механику одной из важнейших дисциплин инженерно-технического образования.

Механика может быть разделена на *кинематику и кинетику.* Кинематика изучает чисто геометрические свойства движения, оставляя в стороне вопрос о законах, управляющих движением. Кинематика имеет поэтому вводный характер к курсу механики, основное содержание которого содержится в кинетике, изучающей законы движения тел, то есть рассматривающей движение с учетом причин, вызывающих или изменяющих его в каждом данном случае.

В свою очередь кинетика делится на *статику,* устанавливающую условия равновесия тел, и *динамику,* занимающуюся изучением собственно движения тел.

§ 2. Краткие исторические сведения

Появление простейших машин, таких, как клин, ворот, рычаг и т. п., привело еще в глубокой древности к возникновению первых сведений об условиях равновесия тел при воздействии на них различных усилий. Отдельные записи и даже сочинения по механике практических конструкций появились впервые в главнейших культурных центрах древнего мира (древний Египет, Вавилон, древняя Греция). Таким образом, механика возникла в тесной связи с нуждами человеческой практики.

Крупнейший ученый древности Аристотель (384—322 г. до н. э.) попытался в своих сочинениях собрать и обобщить имевшиеся к тому времени сведения по механике. Наиболее полно эти сведения, а также взгляды Аристотеля на подле-

жавшие исследованию вопросы изложены в «Проблемах механики», написанных, по-видимому, одним из его учеников. Однако в то время достоверные знания имелись лишь по некоторым вопросам статики. Поэтому из-за недостатка опытного материала и в соответствии со своим идеалистическим мировоззрением по всем другим вопросам автор высказывает по большей части ошибочные суждения, особенно о законах движения тел (деление движений на естественные и насильственные, скорость пропорциональна силе, «природа боится пустоты» и т. д.).

В отличие от Аристотеля другой великий ученый древности Архимед (287—212 г. до н. э.) не допускал в своих трудах никаких чисто умозрительных рассуждений, поэтому для его сочинений характерна строгая научность и логичность изложения. Он ввел в механику понятие о центре тяжести тел, изучил условия равновесия системы параллельных сил тяжести, дал окончательную теорию равновесия рычага.

Следует упомянуть также работы ученых Александрии (II в. до н. э.— I в н. э.), много сделавших по развитию приложений механики. Они работали над созданием военных машин, устройством портов, а также предложили ряд других машин и приборов (пожарный насос, водяные часы и пр.).

Средневековое феодальное общество, характеризовавшееся застоем научной мысли и господством аристотелевской философии, ничего не дало для развития механики. Можно только упомянуть, что опыт в строительстве всякого рода сооружений расширил практические сведения по механике. Накопление этих сведений, а также появление торговой буржуазии, нуждавшейся в точных знаниях о законах природы, привело к появлению в XIII-XIV вв. первых критических высказываний об аристотелевской динамике. Эта критика, однако, оказалась под силу лишь ученым новой буржуазно-капиталистической формации.

Уже гениальный художник, инженер и ученый эпохи Возрождения Леонардо-да-Винчи (1451—1519) отбрасывает аристотелевское представление о том, что тяжелые тела падают быстрее легких, и дает правильную, хотя и достаточно сложную теорию баллистической траектории брошенного тяжелого тела. Им же вводится в механику важное понятие о моменте силы относительно точки.

Критика динамики Аристотеля в XVI в. была продолжена рядом других ученых (Тарталья, Кардано и др.). Окончательное же поражение этой динамике было нанесено в работах крупнейшего ученого своего времени, мужественного борца с церковной реакцией и мракобесием, Галилео Галилея (1564—1642). Он по праву может быть назван основателем современной динамики. Основной его заслугой явилось изучение законов движения тел под действием силы тяжести. Он

показал, что в пустоте все тела падают с одинаковой скоростью, причем эта скорость пропорциональна времени падения; изучил движение тяжелых тел, брошенных параллельно горизонту, то есть изучил равномерно ускоренное движение тел в сложении с инерционным движением. Отчетливо сформулировал закон инерциального движения при отсутствии приложенных сил. Ввел в механику понятие ускорения. Рассматривая условия равновесия груза на наклонной плоскости, Галилей впервые сформулировал для сил тяжести принцип, который теперь, правда, в более общей формулировке, называется принципом виртуальных перемещений, являющимся одним из важнейших принципов так называемой аналитической механики. В своих работах Галилей существенное значение придавал эксперименту, в частности, он опытным путем установил законы падения тел; это стоило ему немалых трудов, если принять во внимание большое несовершенство имевшихся в его время способов измерения промежутков времени.

Работы Галилея были продолжены его учеником Торричелли (1608—1647).

Голландский ученый Стевин (1548—1620) занимался решением ряда практических задач статики, применяя для их решения геометрические методы. В его работах нашли завершение некоторые задачи, впервые поставленные еще Архимедом; подвергнута разработке теория моментов сил, приложенных к какой-либо системе при ее равновесии; установлен закон сложения двух сил по правилу параллелограмма для случая взаимной перпендикулярности сил. С помощью этих результатов им был решен ряд задач по статике простейших машин, используемых на мануфактурных предприятиях того времени. При этом в задаче о равновесии веревочных машин с блоками он пришел к выводам, которые так же, как и у Галилея, представляют собой одну из первых формулировок принципа виртуальных перемещений.

Работы Стевина были продолжены Роберваль (1602—1675) в том же направлении. Ему, в частности, удалось установить закон параллелограмма сил в самом общем случае, то есть при любом угле между силами.

В XVII веке многие ученые занимались рассмотрением вопроса о соударении тел. Гюйгенс (1629—1695) и Гук (1635—1703) в связи с проблемой усовершенствования часового механизма дали ряд работ по теории колебания математического и физического маятников. Большое значение для динамики имели установленные Кеплером еще в начале века законы движения планет вокруг Солнца.

В итоге работами вышеупомянутых, а также и многих других деятелей науки ко второй половине XVII в. оказались накопленными значительные сведения по механике, и ряд

ученых пытается создать систематическое изложение теоретической механики как науки. Из таких работ следует отметить сводные сочинения Валлиса, Вариньона, Декарта и, наконец, Ньютона.

В частности, Вариньону принадлежит разработка некоторых важных новых положений и методов статики, а также такое ее изложение, которое в основном применяется и в настоящее время.

В своем трактате «Начала философии» (1645), посвященном установлению общей картины мироздания, Декарт, обходясь без всякого математического аппарата, пытается дать принципиальное объяснение механическому движению тел. Он считает, что все пространство заполнено веществом, частицы которого, находясь в поступательном и вращательном движениях, непосредственным контактом воздействуют на соседние частицы; передача движения от одних частиц к другим происходит на основе сохранения количества движения. Эти идеи Декарта имели важное принципиальное значение и в известной мере вошли в основные понятия и законы современной механики.

Завершающим явился знаменитый мемуар Ньютона (1642—1726) «Математические начала натуральной философии», опубликованный в 1687 г., представляющий собой стройное математическое изложение механики и входящий почти целиком в содержание современного построения курса «классической» механики, часто называемой поэтому механикой Ньютона. В этом труде Ньютон выступает не только в качестве систематизатора имевшихся результатов, но и в качестве творца нового. Он устанавливает закон равенства действия и противодействия и впервые отчетливо формулирует закон о пропорциональности силы ускорению. Эти два закона вместе с законом инерции Галилея и законом параллелограмма сил и кладутся Ньютоном в основу всего изложения механики. Он вводит понятия абсолютных пространства и времени, трактуя их чисто метафизически, а также проводит деление движения на абсолютное и относительное. Устанавливает далее закон всемирного тяготения, что явилось одним из важнейших достижений Ньютона, ибо тем самым был заложен фундамент современной небесной механики. В частности, Ньютон показал, как из этого закона можно вывести все три закона Кеплера.

В своем труде Ньютон, чтобы быть понятным современникам, пытался всюду, где возможно, пользоваться аппаратом элементарной математики и геометрическими методами, хотя иногда он вводил в изложение и элементы дифференциального и интегрального исчислений, одним из создателей которого он являлся (наряду с Лейбницем). Последовательное же применение высшей математики в механике и разработка аппарата

дифференциальных уравнений механики была проделана Леонардом Эйлером (1707—1783), действительным членом Российской Академии наук, в двух обширных трактатах по динамике материальной точки и твердого тела. Эти результаты Эйлера прочно вошли в аппарат современной механики.

В работах Якова Бернулли, Лопиталя и других ученых еще в XVII в. делаются первые попытки сведения задач динамики к задачам статики. Однако существенный шаг в этом направлении впервые был сделан Даламбером в его «Трактате по динамике» (1743). Поэтому установленный позднее принцип, лежащий в основе данного метода, получил название принципа Даламбера.

В дальнейшем внимание ученых сосредотачивается в основном на развитии аналитических методов механики и установлении новых принципов. Крупнейшее значение здесь имело обширное сочинение Лагранжа (1736—1813) «Аналитическая механика». В этом трактате впервые было дано доказательство принципа виртуальных перемещений, динамика же излагалась на основе нового принципа, получившего в дальнейшем название принципа Даламбера-Лагранжа и являющегося соединением принципа Даламбера с принципом виртуальных перемещений. На этом пути Лагранжу удалось существенно расширить аналитический аппарат динамики, в частности получить новые формы дифференциальных уравнений движения несвободных систем (то есть систем, движение которых ограничено некоторыми препятствиями или вообще подчинено каким-то условиям).

В последующее время, в XVIII и XIX вв., развитие механики происходило в направлении дальнейшей разработки идей Эйлера и Лагранжа. Работами самих этих ученых, а также работами Мопертюи (1698—1759), Гаусса (1777—1855), Якоби (1804—1851), Герца (1857—1894) и Гамильтона (1805—1865) был установлен и детально разработан ряд новых так называемых вариационных принципов в механике, существенно расширивших имевшиеся представления о свойствах движения различных материальных систем и позволивших решить целый ряд новых конкретных задач механики.

Значительный вклад в развитие механики был сделан русскими учеными. Весьма важные результаты были получены в работах крупнейшего русского ученого М. В. Остроградского (1801—1861). Им было дано существенное обобщение принципов виртуальных перемещений и Даламбера на несвободные системы наиболее общего вида, а также распространение этих принципов на случай соударения тел. Одновременно с Гамильтоном и независимо от него им был установлен вариационный принцип, называемый поэтому теперь принципом Гамильтона — Остроградского, причем, в отличие от Гамильтона, Остроградский дал этот принцип в наиболее общей

форме. Он много сделал также для развития теории так называемых канонических уравнений механики.

Весьма примечательны работы русских ученых по теории вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Здесь особое значение имели труды С. В. Ковалевской (1850—1891). После нее над развитием этой теории работали почти исключительно русские ученые, такие, как В. А. Стеклов (1863—1926), Д. К. Бобылев (1842—1917), Д. Н. Горячев (1867—1949), А. М. Ляпунов (1857—1918), Н. Е. Жуковский (1847—1921), С. А. Чаплыгин (1869—1942) и другие.

Фундаментальное значение имели труды крупнейшего русского ученого П. Л. Чебышева (1821—1894) по аналитической теории механизмов. А. М. Ляпунов в своих трудах дал завершение достижений мировой науки своего времени по теории устойчивости движения. Для механики тел переменной массы и теории реактивного движения капитальную роль сыграли работы К. Э. Циолковского (1857—1935) и И. В. Мещерского (1859—1935).

Как мы видели, теоретическая механика развивалась в связи с требованиями практики. Этот стихийно-материалистический путь развития продолжался и в новое время, особенно пока боровшаяся со старыми порядками буржуазия оставалась прогрессивным классом, нуждавшимся в единстве теории и практики. Однако в XIX в. в связи с общим кризисом буржуазной идеологии большую роль начинают играть политические мотивы, вопросы идеологической борьбы с прогрессивным материалистическим мировоззрением угнетенных классов. В естественных науках, в том числе и в теоретической механике, это сказывается в том, что наблюдается стремление к отделению «чистой» науки от ее практических приложений, а также распространение реакционных идеалистических взглядов на основные понятия механики.

В противоположность этому для русской школы механиков в их научной деятельности характерна в большинстве случаев ориентация на критерий практики. Этот сознательный материализм основных представителей русской научной мысли в области механики объясняется их тесной связью с прогрессивными общественными движениями царской России, с передовыми людьми того времени. При этом нашим отечественным ученым удалось дать целый ряд блестящих исследований, в которых прикладные вопросы оказывались разработанными с помощью самой высокой теории. Это особенно относится к деятельности таких корифеев русской науки, как Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин.

Хотя основная научная деятельность Жуковского протекала в области гидромеханики и аэромеханики, где она имела основополагающее значение, за что В. И. Лениным он был назван «отцом русской авиации», он живо интересовался

и всеми другими областями механики, в том числе и собственно теоретической механикой. В результате им был написан ряд работ в этой области, отличавшихся той характерной особенностью, что в них решались методами точной теоретической механики различные технические прикладные задачи. Как говорит о нем его биограф член-корреспондент Академии наук СССР В. В. Голубев, Жуковский «обладал исключительным умением упрощать изучаемое явление, заменять его более простым и, опираясь на эту упрощенную схему, доводить исследование до конца». Работы Жуковского касались таких вопросов, как механика твердого тела, соударение тел, интегрирование уравнений динамики в частных случаях, теория гироскопов, общая теория устойчивости движения, движение маятников и др.

Для научного творчества Чаплыгина характерен высокий теоретический уровень всех его исследований. Как и у Жуковского, центр тяжести его деятельности тоже лежал в гидроаэромеханике, однако ему принадлежат крупные исследования и по теоретической механике. Особенно важное значение имели его работы по аналитической динамике так называемых неголономных систем, то есть систем, подчиненных условиям, наложенным не только на положение точек этих систем, но и на их скорости. До него для таких систем имелись только отдельные, частично ошибочные, работы. Поэтому Чаплыгин, первый составивший уравнения движения таких систем, по праву может быть назван основоположником динамики неголономных систем.

В советский период между нашей наукой, наукой социалистического государства, и наукой капиталистических стран возникли серьезные принципиальные различия. Так, если в основе трактовки основных принципов и понятий науки в буржуазных странах лежит обычно чисто идеалистическая или, в лучшем случае, стихийно-материалистическая точка зрения, то советская наука рассматривает эти принципы и понятия с точки зрения марксистско-ленинской философии.

Основные понятия механики — движение, пространство, время, причины, управляющие движением, — относятся в то же время и к основным понятиям философии, и здесь советским ученым пришлось, опираясь на труды Ф. Энгельса и В. И. Ленина, провести большую работу по пересмотру этих понятий, вскрытию их истинного содержания, истолкованию их с действительно научных позиций диалектического материализма.

Как и в других науках, советские ученые в своих трудах всегда руководствовались ленинским критерием практики как решающим фактором для оценки всякой теории. Сама научная деятельность стала сознательно организовываться и планироваться в связи с задачами практики. В механике это

привело к установлению тесной связи науки с потребностями развития социалистической промышленности путем создания целого ряда научно-исследовательских институтов при Академии наук СССР, при крупных университетах, а также специализированных институтов, обслуживающих определенные области промышленности. Благодаря такой организации и вовлечению в науку громадного числа новых научных кадров, а также благодаря неустанным заботам партии и правительства о развитии науки, в механике создалось большое количество плодотворно работающих научных школ. Нужно, однако, отметить, что основные интересы этих школ сосредоточены в механике деформируемых твердых, жидких и газообразных тел, ибо запросы практики требуют сейчас развития именно этих областей. Всё же отдельные разделы теоретической механики, представляющейся в данное время более или менее законченной наукой, тоже требуют еще дальнейшей разработки. И здесь советским ученым удалось получить существенные результаты.

Так, советские ученые (Н. Г. Четаев и др.) дали ряд ценных работ по дальнейшему развитию очень важной для новой техники теории неголономных систем. Этой же группе ученых, а также некоторым другим удалось расширить наши сведения о вариационных принципах механики и областях их применения.

Целый ряд ученых (Н. Г. Четаев, И. Г. Малкин, К. П. Персидский, В. В. Степанов и др.) успешно работали в области *теории устойчивости движения.* Занимаясь решением конкретных задач об устойчивости движения самолетов, снарядов, автоматических регуляторов, гироскопов и т. д., эти ученые сделали столь существенный вклад в общую теорию устойчивости движения, что в этой области советская наука, безусловно, занимает передовое место в мировой науке.

Весьма значительны достижения советской науки в области *теории колебаний,* где трудами Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронова и других была дана существенная разработка теории нелинейных колебаний, имеющая исключительное значение для радиотехники и других областей новой техники.

Работами А. Н. Крылова было заложено основание для трудов советских ученых по *прикладной теории гироскопов.* Здесь особенно выделяются труды научной школы, возглавляемой Б. В. Булгаковым.

Важное значение имеют также работы советских ученых по теории механизмов и по механике тел переменной массы.

Новые физические теории, обязанные своим появлением работам Г. А. Лоренца, Г. Минковского и особенно А. Эйнштейна, возникшие на рубеже XX в. и получившие развитие в первой его четверти, заставили по-новому оценить место

теоретической механики в науке. Так, теория относительности создала свою так называемую релятивистскую механику, более точно отражающую действительность.

Согласно этой механике принципиально другое содержание получили основные понятия механики; масса движущихся тел оказалась зависящей от скорости; математический аппарат механики получил иной, более сложный вид. Однако поправки, даваемые релятивистской механикой к формулам классической механики, становятся заметными лишь при скоростях, сравнимых со скоростью света (300.000 км/сек).

Оказалось также, что если механическое движение по самой своей природе непрерывно, то есть если положение движущихся тел, их скорости и остальные элементы движения за малые промежутки времени меняются лишь на малые величины, то движение микрочастиц — электронов, позитронов, протонов и т. д., а также их сложных образований — атомных ядер, атомов и молекул часто оказывается прерывным и обладающим волновыми свойствами (аналогично распространению света). Поэтому движение микрочастиц изучает особая наука, называемая квантовой механикой.

Таким образом, теоретическая механика изучает движение тел с размерами, значительно превышающими размеры атомов и молекул, и имеющих скорости, достаточно малые по сравнению со скоростью света.

Несмотря на эти ограничения, теоретическая механика по-прежнему сохраняет свое громадное значение как для научной, так и практической деятельности, если исключить указанные особые случаи.

§ 3. О пространстве и времени

Ньютон ставит основной задачей механики изучение движения тел, происходящего в существующем независимо от этих тел пространстве с течением времени, которое рассматривается как протекающее совершенно одинаково для всех движущихся тел. Такие пространство и время он называет абсолютными, а само движение в этом пространстве тоже абсолютным. Он дал следующие определения:

«Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

«Абсолютное, истинно математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью».

Таким образом, этими определениями признается объективное существование пространства и времени. В этом, как указывает В. И. Ленин в «Материализме и эмпириокритициз-

ме», проявился материализм Ньютона. Однако этими формулировками утверждается оторванное от материи существование как пространства, так и времени, а также отрыв их друг от друга. В этом сказался метафизический характер материалистического мировоззрения Ньютона, незнание им диалектики.

Отдавая себе отчет в том, что на практике мы можем изучать движение тел только по отношению к другим телам, то есть относительное движение, Ньютон считал, что абсолютное движение может быть получено как сумма относительных. При этом движение тоже отрывалось от материи, ибо данное тело может, по его мнению, как двигаться, так и оставаться в покое.

Все эти взгляды Ньютона были подвергнуты суровой критике в трудах классиков диалектического материализма. Как уже упоминалось, движение не есть нечто случайное для материи, а является ее неотъемлемым свойством. Точно так же пространство и время существуют не независимо от всякой материи, а теснейшим образом связаны с ней, являются формами ее существования, совершенно неотъемлемыми от материи. В «Антидюринге» Ф. Энгельс говорит: «Основные формы всякого бытия суть пространство и время; бытие вне времени есть такая же бессмыслица, как бытие вне пространства».

Диалектический материализм утверждает также, что пространство и время образуют тесное единство, то есть то, что существует в пространстве, одновременно существует и во времени, и наоборот.

Точка зрения марксистско-ленинской философии на указанные основные понятия механики получила блестящее подтверждение в современной теории относительности. С ее точки зрения, пространство и время настолько связаны друг с другом, что время можно рассматривать даже как некоторое четвертое измерение, обладающее только несколько иными свойствами, чем остальные три пространственных измерения. Тесная связь пространства и времени с материей видна, в частности, из того, что масса тел, их протяженность и временные интервалы оказались связанными со скоростью движения того тела, относительно которого изучается движение. Здесь надо заметить, что буржуазные ученые использовали это крушение ньютонских представлений для внесения в механику и космогонию различных идеалистических взглядов и даже прямой поповщины. Советские же ученые, базируясь на методологии диалектического материализма, дали правильное толкование результатам теории относительности; это делают также и многие передовые зарубежные ученые.

В природе не существует абсолютно неподвижного тела, относительно которого можно было бы рассматривать движение материальных объектов, то есть можно было бы тем

самым найти абсолютное движение. Тем не менее такое понятие применяется в механике. Именно под абсолютным движением понимают движение относительно того тела, собственным движением которого можно пренебречь. Так, для всех задач механики в пределах солнечной системы абсолютным можно считать движение тел относительно «неподвижных» звезд и центра Солнца; для обычных же «земных» движений абсолютным можно назвать движение относительно поверхности Земли или же относительно пространства, связанного с земной осью.

901258

А. КИНЕМАТИКА

§ 4. Вводные понятия

Как уже указывалось, кинематика изучает геометрию движения, устанавливая чисто описательным путем некоторые свойства движения, отвлекаясь как от причин, управляющих движением, так и от всяких материальных свойств движущихся тел.

Желая определить движение тел относительно некоторого «тела отсчета», мы связываем с этим телом систему координат, называемую *системой отсчета.* Тогда, зная координаты точек тела в этой системе, мы тем самым будем знать положение тела в данный момент времени относительно тела отсчета. Так, например, для движения тел относительно земной поверхности за систему отсчета берется система координат, связанная с этой поверхностью.

Если тело отсчета, а следовательно, и система отсчета принимаются за неподвижные, то такая система называется *основной, неподвижной* или *абсолютной* (условно). В противном же случае система отсчета называется *подвижной* или *относительной.* В первом случае само движение условно тоже называется абсолютным, а во втором — относительным, теми же терминами называются и все элементы движения (скорости, ускорения и т. д.).

Движение происходит во *времени,* которое в классической механике считается протекающим одинаково для всех тел и независимо от скорости их движения. Измерение времени, как и во всех естественных науках, основывается на продолжительности вращения Земли вокруг ее оси и вокруг Солнца, причем за единицу измерения принимается секунда среднего солнечного времени*), практически определяемая с помощью

* Согласно новой международной системе единиц *SI*, принятой на XI Генеральной конференции по мерам и весам, состоявшейся в Париже в октябре 1960 года, из-за неравномерности вращения Земли и непостоян-

точных часов. Отсчет времени производится от некоторого момента, называемого начальным. Обозначая всюду в дальнейшем время буквой t, мы будем обычно принимать, что в начальный момент $t=0$, всякий же другой момент t будет измеряться числом секунд, протекших между началом отсчета времени и рассматриваемым моментом.

Число секунд (минут, часов и т. д.), протекших между двумя моментами времени, называется промежутком времени.

Движение тела или любого геометрического образа будет известно, если для каждого момента времени можно указать его положение в пространстве.

Кинематику Лагранж назвал геометрией четырех измерений. Эта точка зрения нашла применение в теории относительности, где мир рассматривается пространственно-временным многообразием четырех измерений, а событие — точкой этого многообразия. Однако нужно всегда помнить о качественном различии временной координаты от пространственных, проявляющемся, в частности, в том, что эта координата, в отличие от пространственных, при движении тел всегда изменяется лишь в одном направлении — в направлении своего возрастания.

Если тело движется поступательно, то есть если отсутствует всякое вращательное движение тела и все его точки движутся одинаковым образом, то размеры тела не играют никакой роли, и мы можем принять его за *материальную точку*. В других случаях область изучаемого движения может оказаться настолько большой, что размеры тела не имеют существенного значения; такое тело можем приближенно тоже принять за материальную точку. Так, определяя положение судна на море географическими координатами, мы тем самым считаем его совпадающим с некоторой математической точкой, изучая движение звезд, мы тоже принимаем их за движущиеся материальные точки, и т. д.

Совокупность материальных точек, в которой положение и движение отдельных точек зависит от положения и движения других, называется *системой материальных точек*. Такой системой является, например, наша солнечная система.

Теоретическая механика изучает движение и равновесие как изолированных материальных точек, так и их различных систем. В частности, она изучает движение твердых тел, причем для установления наиболее общих законов движения тел, она отвлекается от их способности деформироваться. Такие тела, у которых взаимные расстояния их точек остаются не-

---

ства длительности тропического года секунда определена как $\frac{1}{31556925{,}9747}$ часть тропического 1900 года, что отвечает средней продолжительности старой секунды за последние три столетия.

изменными во все время движения, называются *абсолютно твердыми телами* или *неизменяемыми системами.*

Движение и равновесие *изменяемых* сплошных систем, то есть деформирующихся твердых тел, а также жидкостей и газов изучается другими специальными разделами механики, не входящими в состав собственно теоретической механики.

В кинематике масса тела не имеет никакого значения. Поэтому вместо материальной точки она изучает движение геометрической точки, а абсолютно твердое тело рассматривается как совокупность бесконечного числа таких точек, сплошным образом заполняющих некоторый объем и связанных условием неизменности взаимных расстояний.

В дальнейшем мы рассмотрим сначала кинематику точки, затем кинематику абсолютно твердого тела, а в заключение — сложное движение точки и тела. В последнем разделе рассмотрим некоторые сведения из общей теории скользящих векторов.

Глава I

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 5. Способы определения положения точки

Если положение точки в выбранной системе отсчета остается неизменным, то точка находится в покое относительно этой системы; если же это положение изменяется со временем, то точка находится в движении относительно данной системы отсчета.

Из физических соображений ясно, что движение непрерывно. Поэтому движущаяся относительно какой-то среды или системы отсчета точка опишет в ней геометрическое место в виде некоторой кривой, называемой *траекторией* точки. Таким образом, определение траектории связано с рассматриваемой системой отсчета. Так, лежащий на палубе парохода предмет в системе осей, связанных с пароходом, находится в покое, а в системе отсчета, связанной с Землей, описывает ту же траекторию, что и точка парохода, в которой находится предмет.

Так как направление движения точки в каждый момент времени совпадает с направлением касательной к траектории, то траектория есть непрерывная кривая с единственной касательной в каждой точке, за возможным исключением некоторых особых точек.

Можно указать два основных способа определения положения точки в какой-либо момент времени.

1. *Естественный* способ. В этом способе задается траектория точки в выбранной системе отсчета. Затем некоторая точка M_0 траектории берется за начало отсчета длин дуг s, причем эта величина рассматривается в качестве дуговой координаты, так что в одном выбираемом нами направлении значения s считаются положительными, а в противоположном—отрицательными. Тогда любое положение M точки на траектории будет определяться длиной дуги $s = M_0M$, взятой с соответствующим знаком.

Для полного определения движения точки необходимо знать связь значений s со временем t, то есть нужно знать зависимость

$$s = f(t). \tag{1}$$

Поскольку движущаяся точка может находиться только в одной определенной точке пространства, а само движение непрерывно, то функция f в (1) должна быть однозначной и непрерывной, а также, как будет видно далее, дифференцируемой, по крайней мере, дважды.

Уравнение (1) называется *законом движения точки по траектории* или *конечным уравнением движения точки*. Если взять плоскую прямоугольную систему координат, беря за абсциссу t и за ординату s, то этот закон может быть представлен кривой в этой плоскости, называемой графиком или диаграммой движения.

Таким образом, в данном способе движение точки определяется траекторией и законом (1) движения точки по этой траектории.

2. *Координатный* способ. Если в принятой системе координат задать координаты точки как функции времени, то тем самым положение точки будет известно в любой момент времени. Так, в декартовой системе координат мы должны знать зависимости

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{2}$$

В силу тех же соображений, что и ранее, эти функции должны быть однозначны, непрерывны и дифференцируемы, по меньшей мере, дважды.

Уравнения (2) также называются *законом движения* точки или *уравнениями движения в конечной форме*. Каждое из этих уравнений представляет собой закон прямолинейного движения проекции точки вдоль соответствующей оси координат. С другой же стороны, уравнения (2) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории, в которых роль параметра играет время t. Если же t исключить, то получим траекторию как линию пересечения двух цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными соответствующим координатным осям.

Три уравнения (2) эквивалентны одному векторному уравнению

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \tag{3}$$

дающему радиус-вектор точки $\boldsymbol{r}$ *) в функции от времени.

*) Условимся в дальнейшем векторные величины обозначать жирным шрифтом, а на рисунках—чертой сверху. Последнее обозначение применяется и в тексте в том случае, когда вектор записывается с помощью двух букв, отвечающих началу и концу вектора.

Равенство (3) дает закон движения точки в геометрической форме. Как известно, если переменные значения какого-либо вектора построить при общем начале, то геометрическое место концов всех векторов будет кривой, называемой годографом данного вектора. Так как при движении точки конец радиуса-вектора, при неизменном его начале, скользит вдоль траектории, то траектория является годографом радиуса-вектора.

Укажем, наконец, что положение точки иногда удобнее определять не декартовыми, а какими-либо криволинейными координатами q_1, q_2, q_3. В этом случае закон движения будет даваться в виде

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t), \tag{4}$$

где правые части должны обладать теми же свойствами, что и в уравнениях (2).

Если точка движется по какой-либо поверхности или линии, то число координат, задаваемых в функции от времени, соответственно уменьшается. Так, если точка движется в плоскости, то закон движения в декартовых координатах можно взять в виде

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{5}$$

или, например, в полярных координатах в виде

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \tag{6}$$

где r — величина*) радиуса-вектора, а φ — полярный угол. Исключая время из уравнений (5) или (6), мы придем к уравнению траектории в ее плоскости.

От одного способа задания движения всегда можно перейти к другому. Пусть, например, движение точки задано в координатной форме уравнениями (2). Тогда, как уже говорилось, исключая время t, получаем уравнение траектории. Элемент дуги траектории есть

$$|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Но из уравнений (2)

$$dx = \dot{x}\,dt, \quad dy = \dot{y}\,dt, \quad dz = \dot{z}\,dt.$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, точкой вверху обозначено дифференцирование по времени (в отличие от дифференцирований по другим аргументам). Подставляя в предыдущее выражение и учитывая, что точка может двигаться как в сторону возрастания дуговой координаты s, так и в сторону ее убывания, получаем

*) Мы будем часто, когда это не может вызвать недоразумения пользоваться термином „величина вектора" вместо „модуль вектора"

TOM CRUISE

$$ds = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt,$$

знак должен быть взят в соответствии с тем, в какую сторону движется точка в данный момент. Выбирая определенное положение точки за начальное, находим отсюда

$$s = s_0 + \int_0^t \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt,$$

где s_0 определяет начальное положение точки. Это и будет закон движения точки по траектории $s = s(t)$.

Обратный переход от естественного способа к координатному часто легко может быть выполнен с помощью простых геометрических соображений.

Пример. Пусть точка совершает плоское движение по закону

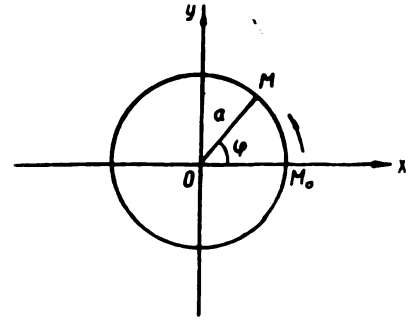
$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t.$$

Требуется перейти к естественному способу представления этого движения.

Желая исключить время t, возвышаем обе части уравнений в квадрат и складываем, получаем уравнение траектории

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{a}$$

то есть окружность радиуса a с центром в начале координат (фиг. 1). Видим, что в начальный момент $t = 0$ движущаяся точка находилась в точке M_0 с координатами $x = a$, $y = 0$. Примем эту точку за начало отсчета криволинейной координаты s, а за положительное направление отсчета — направление против стрелки часов. Видим также, что с ростом t координата y начинает возрастать, то есть движение точки по окружности происходит в направлении, указанном на чертеже стрелкой. Следовательно,



Фиг. 1.

$$ds = +\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt.$$

Но $\dot{x} = -a\omega\sin\omega t$, $\dot{y} = a\omega\cos\omega t$. Подставляя эти выражения, находим

$$ds = a\omega\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}\,dt = a\omega dt.$$

Так как $s_0 = 0$, то отсюда

$$s = a\omega t. \tag{b}$$

В то же время, дуга $s = a\varphi$, где φ центральный угол, следовательно, $\varphi = \omega t$. Таким образом, точка M будет равномерно двигаться по окружности, а ее радиус будет описывать в равные промежутки времени равные центральные углы.

Наоборот, если движение точки M задано уравнениями (a) и (b), то непосредственно из чертежа видим, что

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi.$$

Λ так как

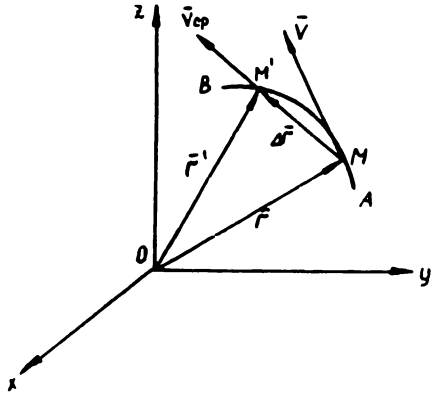
$$\varphi = \frac{s}{a} = \omega t,$$

то окончательно закон движения в координатной форме будет

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t.$$

§ 6. Скорость точки

1. Скорость как вектор. При так называемом равномерном движении скоростью точки называется отношение пройденного за какой-либо промежуток времени пути к этому промежутку. Это определение можно распространить и на любое неравномерное движение, рассматривая достаточно малые отрезки времени и отвечающие им перемещения точки. Кроме того, следует учесть, что перемещение точки есть вектор, а так как промежуток времени—скаляр, то скорость будет *вектором*, идущим в направлении движения точки в данный момент.



Фиг. 2.

Чтобы разыскать этот вектор, рассуждаем так. Пусть AB есть отрезок траектории точки в выбранной системе координат (фиг. 2). Расположение осей прямоугольной декартовой системы координат мы всегда будем брать по правилу правого винта. Пусть в момент времени t точка занимает положение M, определяемое радиусом-вектором r, а в момент t' — положение M' с радиусом-вектором r'. Тогда вектор $\overline{MM'} = \Delta r = r' - r$ представит собой перемещение точки за время $\Delta t = t' - t$, определенное не только по величине, но и по направлению. Относя вектор перемещения к единице времени, можем полученную величину

$$v_{ср} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

назвать средней скоростью точки за промежуток времени Δt. Она направлена по хорде MM' в сторону движения.

Переходя в предыдущем выражении к пределу, устремляя Δt к нулю, мы, очевидно, и получим скорость точки в данный момент t. Таким образом,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}. \qquad (1)$$

При этом переходе к пределу, как видно из чертежа, точка M' устремится к точке M, а вектор Δr—к своему предельному положению, расположенному по касательной к траектории в точке M.

Следовательно, *скорость точки в данный момент есть вектор, равный производной по времени от радиуса-вектора точки.* Он направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

Заметим, что полученный результат имеет общий характер для любого вектора, зависящего от скалярного аргумента: повторив те же рассуждения, что и при выводе формулы (1), найдем, что *производная от вектора по скалярному аргументу направлена по касательной к годографу вектора в сторону возрастания аргумента.*

Величину скорости можно определять по-разному, в зависимости от способа задания движения. Так, при естественном способе замечаем, что $|dr|$ совпадает с элементом дуги траектории $|ds|$. Поэтому для величины скорости будем иметь

$$v = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

Часто же пишут просто

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \qquad (2)$$

если выбирают положительное направление отсчета дуговой координаты совпадающим с направлением движения точки, так что $ds > 0$ (dt всегда положительно). Если же такого выбора не сделано, то формула (2) будет определять алгебраическое значение скорости, которое будет больше нуля при $ds > 0$ и меньше нуля при $ds < 0$.

При координатном способе задания движения точки можем записать

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты неподвижных координатных осей. Подставляя это выражение в (1), находим, что

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}. \qquad (3)$$

Здесь, как и всюду в этом разделе, мы изучаем „абсолютное" движение, то есть считаем оси координат неподвижными, так что $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — постоянные векторы. Из (3) находим, что проекции скорости на оси декартовых координат выражаются формулами:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}. \tag{4}$$

Известно, что вектор определяется своими проекциями. Используя соответствующие формулы векторной алгебры, находим для величины скорости:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{5}$$

Направление же вектора скорости будет определяться направляющими косинусами:

$$\left.\begin{aligned} \cos(v, x) &= \frac{\dot{x}}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(v, y) &= \frac{\dot{y}}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(v, z) &= \frac{\dot{z}}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

2. Криволинейные координаты. Проекции скорости на оси этих координат. Положение точки в пространстве можно определять не обязательно декартовыми координатами. Во многих случаях оказывается более удобным, как говорилось ранее, делать это с помощью некоторых криволинейных координат q_1, q_2, q_3.

В общем случае за такие координаты могут быть приняты любые непрерывные однозначные функции от x, y и z.

$$q_1 \quad q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z), \tag{7}$$

удовлетворяющие необходимым требованиям дифференцируемости и условию однозначной разрешимости этих зависимостей относительно x, y, z, то есть из (7) можно однозначно найти функции

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y \quad y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \tag{8}$$

При этих условиях каждой точке пространства будет отвечать определенная тройка чисел q_1, q_2, q_3 и, наоборот, каждой комбинации этих трех чисел будет соответствовать единственная точка пространства. Поэтому величины q_1, q_2, q_3 называются *обобщенными криволинейными координатами.*

Пусть c_1, c_2, c_3 — некоторые постоянные. Тогда равенства

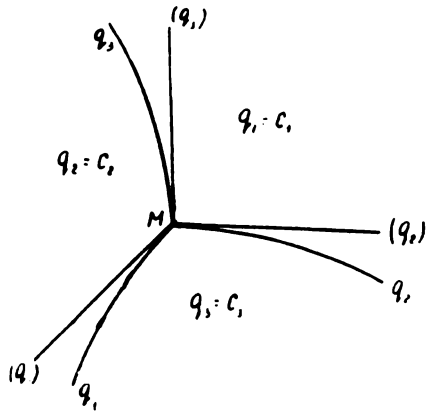
$$q_1 = c_1, \quad q_2 = c_2, \quad q_3 = c_3 \tag{9}$$

после подстановки в них правых частей выражений (7) дают уравнения поверхностей, на которых одна из криволи-

нейных координат оказывается постоянной. Эти поверхности называются *координатными поверхностями*.

Линии пересечения этих поверхностей называются *координатными линиями*; вдоль каждой такой линии окажутся постоянными две координаты, переменной будет лишь третья из координат, название которой применяется для обозначения данной линии. Так, линия пересечения поверхностей $q_2 = c_2$ и $q_3 = c_3$ будет координатной линией q_1; аналогично получаются и другие координатные линии.

Таким образом, в каждой точке пространства M пересекаются три координатные поверхности (9); из этой точки выходят три координатные линии q_1, q_2, q_3 (фиг. 3). Каса-



Фиг. 3.

тельные к этим линиям, направленные в сторону возрастания соответствующей координаты, называются *осями криволинейных координат*. Будем обозначать их через $(q_1), (q_2), (q_3)$. Мы ограничимся в дальнейшем тем случаем, когда эти оси в каждой точке пространства взаимно перпендикулярны. Такие системы криволинейных координат называются *ортогональными*.

Возьмем, например, систему цилиндрических координат r, φ, z (фиг. 4). Координатными поверхностями здесь для точки M являются:

1) поверхность $r = \text{const}$ кругового цилиндра радиуса r с осью Oz, проходящая через точку M;

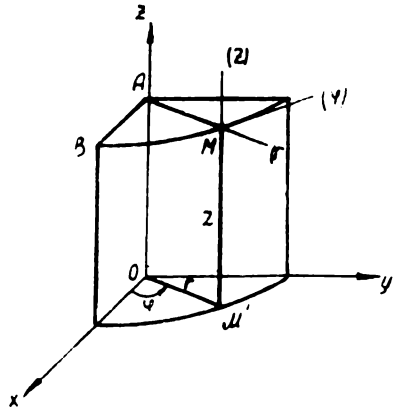
2) полуплоскость $\varphi = \text{const}$, проходящая через M и ось Oz;

3) плоскость $z = \text{const}$, проходящая через точку M перпендикулярно оси Oz.

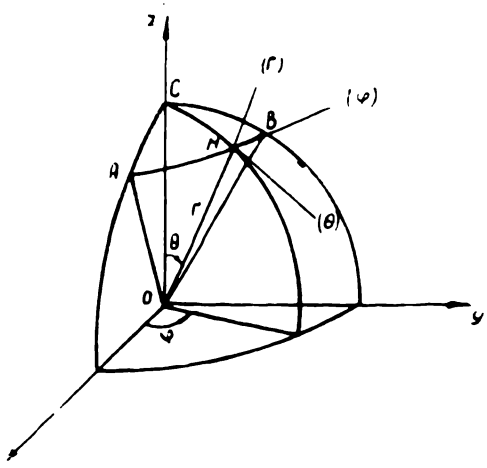
Координатными линиями будут:

1) линия r—прямая AM, на которой $\varphi = \text{const}$ и $z = \text{const}$;

2) линия φ—дуга окружности BM, вдоль которой $r = \text{const}$ и $z = \text{const}$;



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Вводя обозначение

$$H_\nu = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\nu}\right)^2}, \qquad (10)$$

можем выражение (а) переписать в виде

$$\boldsymbol{v} = H_1\dot{q}_1\boldsymbol{q}_1^0 + H_2\dot{q}_2\boldsymbol{q}_2^0 + H_3\dot{q}_3\boldsymbol{q}_3^0,$$

откуда для проекций скорости получаем

$$v_1 = H_1\dot{q}_1, \quad v_2 = H_2\dot{q}_2, \quad v_3 = H_3\dot{q}_3. \qquad (11)$$

Величины H_ν, называемые коэффициентами Лямэ, определяются по (10) с помощью зависимостей (8).

Модуль скорости найдется по формуле

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{H_1^2\dot{q}_1^2 + H_2^2\dot{q}_2^2 + H_3^2\dot{q}_3^2}. \qquad (12)$$

Так, для цилиндрической системы координат формулы (8), согласно фиг. 4, принимают вид

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Коэффициенты Лямэ будут

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + 0} = r,$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1.$$

Тогда по (11) для проекций скорости получаем выражения

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}, \qquad (13)$$

а для величины скорости по (12) находим

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}.$$

В частном случае плоского движения точки берем оси Ox, Oy в плоскости движения, тогда $z = 0$, и цилиндрические координаты переходят в полярные координаты r и φ на плоскости. Проекции скорости на оси этой системы получаются из (13) в виде

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \qquad (14)$$

величина скорости будет

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Скорость v_r называется *радиальной* скоростью, а v_φ — *трансверсальной*.

Для системы сферических координат формулы (8), согласно фиг. 5, будут

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Тем же путем для коэффициентов Лямэ получим

$$H_r = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1,$$

$$H_\theta = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta} = r,$$

$$H_\varphi = \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = r\sin\theta.$$

Проекции скорости выразятся в виде

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}, \tag{15}$$

а величина скорости

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2}.$$

3. Угловая скорость, скорость в круговом движении. Если какая-либо величина изменяется со временем, то производную от нее по времени можно назвать скоростью изменения данной величины. Применяя это определение, производные от обобщенных координат по времени $\dot{q}$ называют *обобщенными* скоростями.

Если данная обобщенная координата есть некоторый угол, то соответствующую обобщенную скорость называют обычно *угловой скоростью*. Особенно часто это наименование применяется к производной от полярного угла φ в плоском движении точки. Так как при этом угол φ определяет направление радиуса-вектора точки, то $\omega = \dot{\varphi}$ называют угловой скоростью вращения радиуса-вектора.

При движении точки угол может как возрастать, так и убывать; в первом случае $\dot{\varphi} > 0$, во втором — $\dot{\varphi} < 0$. Условимся считать, что на плоскость движения мы всегда смотрим со стороны положительного направления оси Oz. Тогда, согласно фиг. 4, возрастанию угла φ будет отвечать вращение радиуса-вектора против стрелки часов. Иногда угловой скоростью ω называют абсолютное значение производной $\dot{\varphi}$, так что при убывании угла φ следует считать $\omega = -\dot{\varphi}$.

Если L есть единица измерения длин, а T — единица измерения времени, то размерность линейной скорости будет

$$[v] = \frac{L}{T}.$$

В системе *CGS* за единицу длины принят сантиметр, а за единицу времени—секунда, поэтому в этой системе

$$[v] = \frac{см}{сек}.$$

В технической же системе единиц *МКгS*, так же как и в новой международной системе *SI* эти единицы будут метр и секунда, поэтому в этих системах

$$[v] = \frac{м}{сек}.$$

Измеряя углы в радианах, получим для размерности угловой скорости

$$[\omega] = \frac{1}{T},$$

ибо радиан есть безразмерная величина, то есть в указанных системах единиц

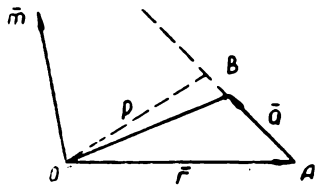
$$[\omega] = \frac{1}{сек}.$$

Пусть теперь точка движется по окружности радиуса R. Применяя формулы (14), мы должны положить в них $r = R = \text{const}$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$. Тогда

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = v = R\omega. \tag{16}$$

Таким образом, в этом случае скорость будет чисто трансверсальной, и ее величина равна произведению радиуса окружности на угловую скорость.

4. Момент вектора относительно точки и оси. Связь между ними. Возьмем некоторый вектор $\boldsymbol{a}$ (фиг. 6). Опустим из какой-либо точки O перпендикуляр на линию действия вектора. Длина этого перпендикуляра p называется *плечом* вектора $\boldsymbol{a}$ *относительно точки* O.



Фиг. 6.

Тогда *моментом вектора* $\boldsymbol{a}$ *относительно точки* O *называется вектор* $\boldsymbol{m}$, *численно равный произведению величины вектора на его плечо и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор* $\boldsymbol{a}$ *и точку* O, *в такую сторону, что, приложив вектор* $\boldsymbol{m}$ *в точке* O *и смотря с конца этого вектора, мы видели бы вектор* $\boldsymbol{a}$ *направленным справа налево, то есть против стрелки часов.* Точка O называется центром момента.

По определению величина вектора $\boldsymbol{m}$ есть

$$m = pa,$$

что иначе можно записать как удвоенную площадь треугольника OAB (фиг. 6):

$$m = 2\text{пл}_{\Delta}OAB. \qquad \text{(а)}$$

Если тогда $\boldsymbol{r}$ есть радиус-вектор точки приложения A вектора $\boldsymbol{a}$, то равенство (а) говорит о том, что

$$m = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}|.$$

Легко убедиться, что и направление вектора $\boldsymbol{m}$ совпадает с направлением этого векторного произведения. Таким образом, момент $\boldsymbol{m}$ может быть записан в векторной форме:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}. \qquad (17)$$

Если точку O принять за начало декартовой системы координат, то векторное произведение, как известно, можно представить в виде определителя, так что

$$\boldsymbol{m} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Отсюда проекции момента вектора $\boldsymbol{a}$ на оси декартовых координат выразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \begin{vmatrix} y & z \\ a_y & a_z \end{vmatrix} = ya_z - za_y, \\ m_y &= \begin{vmatrix} z & x \\ a_z & a_x \end{vmatrix} = za_x - xa_z, \\ m_z &= \begin{vmatrix} x & y \\ a_x & a_y \end{vmatrix} = xa_y - ya_x. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Пусть теперь даны вектор $\boldsymbol{a}$ и ось l с выбранным на ней положительным направлением, указанным стрелкой (фиг. 7). Через произвольную точку оси O проводим плоскость P, перпендикулярную оси. Пусть вектор $\boldsymbol{a}'$ будет составляющей вектора $\boldsymbol{a}$, лежащей в плоскости P. Опустим из точки O на линию действия этой составляющей перпендикуляр. Длина этого перпендикуляра p называется *плечом* вектора $\boldsymbol{a}$ *относительно оси* l. Тогда *моментом вектора* $\boldsymbol{a}$ *относительно оси* l *называется взятое со знаком плюс или минус произведение величины составляющей* $\boldsymbol{a}'$ *на*

плечо вектора относительно оси. Таким образом, обозначая момент через m_l, имеем

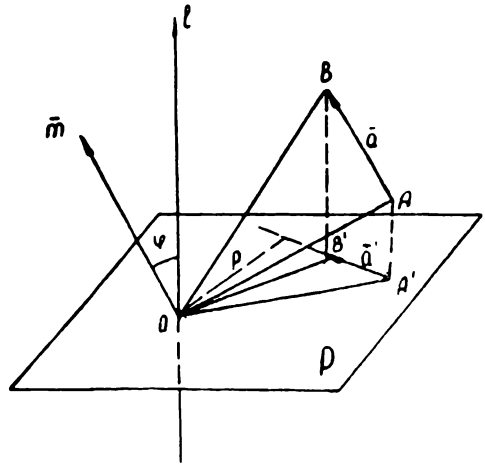
$$m_l = \pm pa'. \qquad (19)$$

Знак плюс в этой формуле берется в том случае, если смотря на плоскость P с положительного направления оси l, видим вектор a идущим против стрелки часов, и минус—в противоположном случае.

Найдем связь между моментами относительно оси и точки. Как видно из чертежа фиг. 7,

$$m_l = pa' = 2\text{пл}_\Delta OA'B'.$$

Но треугольник $OA'B'$ есть проекция треугольника OAB на плоскость P, причем угол между плоскостями треуголь-



Фиг. 7.

ников равен углу φ между моментом $\boldsymbol{m}$ вектора $\boldsymbol{a}$ относительно точки O и осью l. Поэтому

$$m_l = 2\text{пл}_\Delta OAB \cdot \cos\varphi,$$

что, согласно (а), дает:

$$m_l = m\cos\varphi.$$

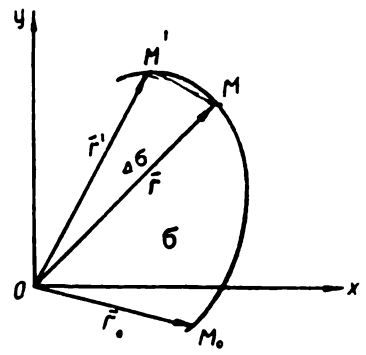
Учитывая, что точка O взята на оси l совершенно произвольно, мы можем полученному результату дать следующую формулировку: *момент вектора относительно оси равен проекции на эту ось момента вектора относительно любой точки оси.*

Отсюда следует, что проекции момента на оси координат (18) являются в то же время моментами вектора отно-

сительно координатных осей, ибо начало координат есть общая точка всех трех осей координат.

5. Секториальная скорость. Рассмотрим сначала плоское движение. В этом случае радиус-вектор точки, скользя при ее движении своим концом по траектории, к моменту времени t опишет некоторую площадь $\sigma = OM_0M$ (фиг. 8), заключенную между траекторией и радиусами-векторами r_0 и r. Тогда за последующий промежуток времени Δt он опишет добавочный сектор с площадью $\Delta\sigma$, так что за единицу времени он будет описывать в среднем площадь

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}.$$



Фиг. 8.

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, то есть производная

$$\frac{d\sigma}{dt},$$

называется *секториальной скоростью*. Ее величина, очевидно, зависит от выбора начала координат, поэтому необходимо указывать центр, относительно которого она берется.

В полярных координатах малую площадку $\Delta\sigma$ можно с точностью до малых высшего порядка рассматривать как треугольник с углом $\Delta\varphi$ при вершине O, с основанием r и высотой $r\Delta\varphi$, поэтому

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi.$$

Деля это выражение на Δt и переходя к пределу, найдем, что секториальная скорость в полярных координатах будет

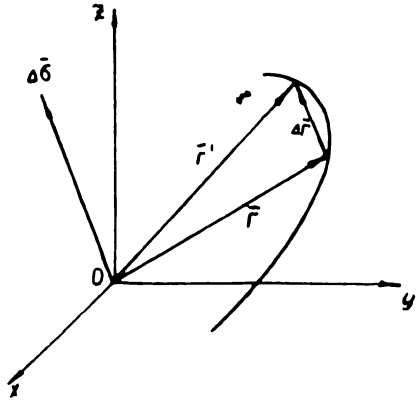
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \tag{20}$$

В пространственном случае радиус-вектор r будет описывать некоторую коническую поверхность, причем траектория будет играть роль направляющей. Однако здесь, в отличие от плоского случая, необходимо указать также ориентацию в пространстве площадок, описываемых радиусом-вектором. С этой целью каждую площадку представляют нормальным к ней вектором, модуль которого равен величине площадки. Если Δr — перемещение точки за вре-

мя Δt (фиг. 9), то площадь треугольника, образованного векторами $\boldsymbol{r}, \Delta\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$, равна $\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\Delta\boldsymbol{r}|$. Поэтому вектор

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}\times\Delta\boldsymbol{r}$$

как раз будет выражать ориентированную площадь этого треугольника. Деля это выражение на Δt и переходя к пре-



Фиг. 9.

делу, получим секториальную скорость точки относительно центра O в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}\times\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

что, согласно (1), можно переписать как

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}. \tag{21}$$

Таким образом, *секториальная скорость точки относительно какого-либо центра равна половине момента скорости точки относительно того же центра.*

Проектируя формулу (21) на оси декартовых координат, получим согласно (18) и (4):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\sigma_x}{dt}&=\frac{1}{2}(y\dot{z}-z\dot{y}),\\ \frac{d\sigma_y}{dt}&=\frac{1}{2}(z\dot{x}-x\dot{z}),\\ \frac{d\sigma_z}{dt}&=\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x}).\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Так как площадь, представляемая вектором $\frac{d\sigma}{dt}$, перпендикулярна ему, то проекции этой площади на плоскости координат, перпендикулярные соответствующим осям, как раз представятся теми же формулами (22). Поэтому эти формулы одновременно представляют собой площади, описываемые в единицу времени радиусами-векторами проекций точки в соответствующих координатных плоскостях.

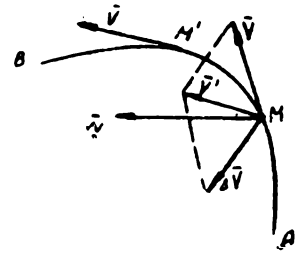
В частности, в плоском случае плоскость движения перпендикулярна оси z, поэтому $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_z}{dt}$, и третья формула (22) будет определять секториальную скорость в декартовых координатах для этого случая.

Секториальная скорость имеет размерность

$$\left[\frac{d\sigma}{dt}\right] = [r]\,[v] = \frac{L^2}{T}.$$

§ 7. Ускорение точки

1. Вектор ускорения. Проекции на оси декартовых координат. Пусть точка, двигаясь по своей траектории AB, в момент t находится в точке M, имея скорость $\boldsymbol{v}$, направленную, как мы знаем, по касательной к траектории (фиг. 10); пусть в некоторый последующий момент $t + \Delta t$ она находится в M' и имеет скорость $\boldsymbol{v}'$. Тогда, снося вектор $\boldsymbol{v}'$ в точку M и строя параллелограмм с диагональю $\boldsymbol{v}'$ и стороной $\boldsymbol{v}$, находим геометрически изменение скорости $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$ за промежуток времени Δt.



Фиг. 10.

Ускорением называется изменение скорости точки, отнесенное к единице времени. Отношение

$$\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

может быть названо *средним ускорением* точки за время Δt. Переходя в этом выражении к пределу $\Delta t \to 0$, получим вектор *истинного ускорения* точки $\boldsymbol{w}$ в виде

$$\boldsymbol{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}. \qquad (1)$$

Как видно из фиг. 10, вектор скорости при движении точки будет непрерывно поворачиваться вместе с касательной к траектории. Поэтому вектор $\Delta \boldsymbol{v}$, а следовательно, и вектор ускорения будут, вообще говоря, направлены в сторону вогнутости траектории. Исключение представляют два случая: 1) случай прямолинейного движения, когда вектор скорости, а, следовательно, и вектор ускорения во всех точках траектории будут направлены по траектории точка; 2) случай точек перегиба криволинейной траектории, ибо в этих точках происходит изменение вогнутости траектории на противоположную.

При переходе к пределу $\Delta t \to 0$ точка M' устремится к M, а плоскость векторов $\boldsymbol{v}$ и $\Delta \boldsymbol{v}$ устремится к совпадению с плоскостью, проходящей через касательную к траектории в M и бесконечно близкую точку M'. Как известно, последняя плоскость является соприкасающейся плоскостью. Таким образом, вектор ускорения всегда лежит в соприкасающейся плоскости траектории в данной ее точке.

Размерность ускорения будет

$$[w] = \frac{L}{T^2}.$$

Для получения записи ускорения в декартовых координатах нам, согласно (1), достаточно продифференцировать дважды по времени выражение радиуса-вектора точки

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Таким путем находим

$$\boldsymbol{w} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}.$$

Отсюда для проекций и величины ускорения получаем

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z}, \tag{2}$$

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \tag{3}$$

Направляющие косинусы вектора ускорения будут

$$\cos(\boldsymbol{w}, x) = \frac{\ddot{x}}{w}, \quad \cos(\boldsymbol{w}, y) = \frac{\ddot{y}}{w}, \quad \cos(\boldsymbol{w}, z) = \frac{\ddot{z}}{w}. \tag{4}$$

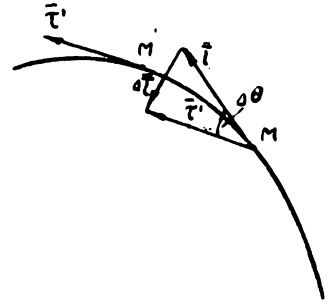
2. Проекции ускорения на оси естественного трехгранника. Обозначим через $\boldsymbol{\tau}$ орт касательной к траектории, направленный в сторону движения точки. Тогда скорость точки можно записать в виде

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}.$$

Подставляя это выражение в (1), получим

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\tau + v\frac{d\tau}{dt}. \qquad (a)$$

Найдем вектор $\frac{d\tau}{dt}$. Пусть τ и τ' — орты касательной к траектории в точках M и M' соответственно (фиг. 11). Снося τ' в M, найдем геометрически приращение $\Delta\tau$ вектора τ. Переходя к пределу $\Delta t \to 0$, то есть устремляя точку M' к точке M, найдем, повторяя те же рассуждения, что и при получении вектора ускорения, что вектор $\Delta\tau$ устремится к своему предельному положению, лежащему в соприкасающейся плоскости траектории; так как при этом угол $\Delta\theta$ устремится к нулю, то это предельное положение окажется нормальным к τ, то есть к самой траектории, и идущим в сторону ее вогнутости. Учитывая далее, что модули векторов τ и τ' равны единице, будем иметь, как видно из чертежа:



Фиг. 11.

$$|\Delta\tau| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2},$$

что при достаточно малых углах $\Delta\theta$ дает

$$|\Delta\tau| = \Delta\theta.$$

Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, есть главная нормаль; поэтому

$$\Delta\tau = n\Delta\theta$$

и

$$\frac{d\tau}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = n\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}n, \qquad (b)$$

где n — орт главной нормали к траектории, направленный в сторону ее вогнутости.

Но

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

При этом

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} —$$

кривизна траектории, а

$$\frac{ds}{dt} = v. \qquad (c)$$

Следовательно,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\rho}.$$

Тогда равенство (b) примет вид:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{v}{\rho} n.$$

Подставляя это выражение в (a), найдем

$$w = \frac{dv}{dt}\tau + \frac{v^2}{\rho} n. \qquad (5)$$

Первое слагаемое представляет собой вектор, направленный по касательной к траектории, второе — по главной нормали к центру кривизны траектории, по бинормали же b составляющей ускорения нет. Учитывая еще (c), можем проекции ускорения на оси естественного трехгранника траектории записать в виде

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0. \qquad (6)$$

Проекция w_τ называется *касательным* или *тангенциальным* ускорением, а w_n — *нормальным* ускорением.

Касательное ускорение характеризует изменение величины скорости. При равномерном движении, то есть при $v = \text{const}$, касательное ускорение отсутствует. При неравномерном движении оно может обращаться в нуль только в отдельных точках, именно в тех, в которых величина скорости достигает стационарного значения (максимум, минимум или минимакс).

Если тангенциальное ускорение постоянно, то есть

$$w_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = a = \text{const},$$

то отсюда получаем закон изменения скорости и закон движения точки в виде

$$v = at + v_0,$$

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Такое движение называется равноускоренным или равнопеременным.

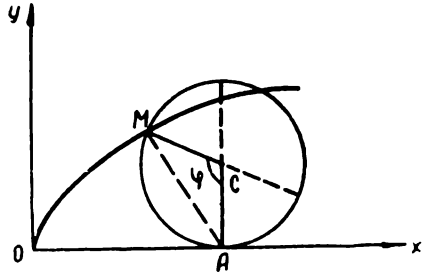
Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Оно равно нулю всюду при прямолинейном движении, когда $\frac{1}{\rho} = 0$. При криволинейном движении оно может обращаться в нуль лишь в отдельных точках, в которых равна нулю или кривизна (точки перегиба), или скорость (точки мгновенной остановки, наблюдающиеся, например, в моменты времени, после которых наступает возвратное движение точки).

Из предыдущего следует, что полное ускорение может равняться нулю только в случае равномерного и прямолинейного движения, и наоборот.

Величина ускорения согласно (6) найдется по формуле

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}. \qquad (7)$$

При $w_\tau \neq 0$ вектор ускорения отклоняется от главной нормали. При этом, если в направлении движения скорость возрастает, то $w_\tau > 0$, и ускорение отклонится от главной нормали в сторону движения, в противном же случае $w_\tau < 0$ и отклонение произойдет в сторону, обратную движению.



Фиг. 12.

Пример. Колесо радиуса $a = 1\,м$ катится без скольжения по горизонтальной оси Ox по закону $\varphi = \omega t$ (фиг. 12), где $\omega = 20\,\frac{1}{сек}$. Найти для точки обода величину и направление ускорения, а также радиус кривизны ее траектории.

За начало координат примем начальное положение точки обода на оси x. Тогда, как известно, эта точка будет описывать циклоиду с уравнениями

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi).$$

Так как $\dot{\varphi} = \omega$, то, учитывая, что $a = 1\,м$, можем закон движения точки записать в виде

$$x = \omega t - \sin\omega t, \quad y = 1 - \cos\omega t.$$

Отсюда дифференцированием находим:

$$\dot{x} = \omega(1 - \cos\omega t), \quad \dot{y} = \omega\sin\omega t,$$

$$\ddot{x} = \omega^2\sin\omega t, \quad \ddot{y} = \omega^2\cos\omega t. \qquad (a)$$

Следовательно, ускорение будет

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 = 400\ м/сек^2. \qquad (b)$$

Направление ускорения найдется по косинусам:

$$\cos(\overline{w}, x) = \frac{\ddot{x}}{w} = \sin\omega t = \sin\varphi, \quad \cos(\overline{w}, y) = \frac{\ddot{y}}{w} = \cos\omega t = \cos\varphi. \qquad (c)$$

Второе равенство (c) говорит о том, что ускорение образует с осью Oy угол φ, что дает нам, вследствие равенства вертикальных углов, направление MC; симметричное же ему относительно оси, параллельной Oy, направление отпадает в силу первого равенства (c). Таким образом, ускорение направлено к центру колеса.

Радиус кривизны можно найти из выражения для нормального ускорения

$$w_n = \frac{v^2}{\rho},$$

откуда

$$\rho = \frac{v^2}{w_n}. \qquad (d)$$

По формулам (a) имеем:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega^2[(1 - \cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t] = 2\omega^2(1 - \cos\omega t) =$$

$$= 4\omega^2 \sin^2\frac{\omega t}{2},$$

$$v = 2\omega \sin\frac{\omega t}{2}. \qquad (e)$$

Для нормального ускорения можем записать

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}. \qquad (f)$$

Но по (e)

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \omega^2 \cos\frac{\omega t}{2}.$$

Подставляя это выражение и w из (b) в (f), находим

$$w_n = \sqrt{\omega^4 - \omega^4 \cos^2\frac{\omega t}{2}} = \omega^2 \sin\frac{\omega t}{2},$$

а подстановка v^2 и w_n в (d) дает

$$\rho = 4\sin\frac{\omega t}{2} = 4\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Из равнобедренного треугольника MAC видим, что

$$MA = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно,

$$\rho = 2MA.$$

В заключение заметим, что так как

$$s = s(t), \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad w_\tau = \frac{d^2s}{dt^2},$$

то, не имея аналитического выражения какой-либо из этих функций, а зная лишь график ее зависимости от времени, можем графическим дифференцированием или интегрирова-

нием найти графики других двух функций. Такой графический метод находит частое применение в технике и научном эксперименте.

3. Ускорение в круговом движении. По (6—16) скорость в этом случае будет

$$v = R\omega,$$

где R — радиус окружности, ω — угловая скорость. Отсюда находим, что касательное ускорение будет

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\dot{\omega}. \qquad (8)$$

Так как $\omega = \dot{\varphi}$, где φ — угол поворота радиуса-вектора точки, то

$$\dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Эта величина дает изменение угловой скорости в единицу времени и поэтому называется *угловым ускорением*. Его размерность будет

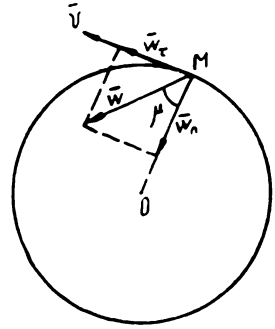
$$[\dot{\omega}] = \frac{1}{T^2}.$$

Подставляя далее выражение скорости и радиуса кривизны $\rho = R$ во вторую формулу (6), найдем для нормального ускорения

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2. \qquad (9)$$

Обозначим угол между вектором полного ускорения и радиусом окружности через μ (фиг. 13). Из чертежа видно, что этот угол согласно (8) и (9) определится выражением:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}. \qquad (10)$$



Фиг. 13.

Если точка движется по окружности ускоренно, то ω растет и $\dot{\omega} > 0$, ускорение w_τ будет направлено по вектору скорости v. Если же точка движется замедленно, то ω убывает и $\dot{\omega} < 0$; в этом случае будет $\mu < 0$, то есть вектор w_τ будет направлен по касательной к окружности противоположно вектору скорости v.

Для величины ускорения получим

$$w = R\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}. \qquad (11)$$

4. Проекции ускорения на оси криволинейных координат. В § 6, п. 2 мы видели, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu} = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu}\right| \boldsymbol{q}_\nu^0 = H_\nu \boldsymbol{q}_\nu^0,$$

поэтому единичный вектор оси (q_ν) криволинейных координат можно записать в виде

$$\boldsymbol{q}_\nu^0 = \frac{1}{H_\nu}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu}.$$

Отсюда для проекции ускорения точки на данную ось получаем

$$w_\nu = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{q}_\nu^0 = \frac{1}{H_\nu}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu},$$

или иначе

$$w_\nu = \frac{1}{H_\nu}\left\{\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu}\right) - \boldsymbol{v}\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu}\right\}. \qquad \text{(a)}$$

Из выражения

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3 \qquad \text{(b)}$$

вытекает, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_\nu};$$

поэтому

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_\nu} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\nu}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\nu}\frac{v^2}{2}. \qquad \text{(c)}$$

Дифференцируя же (b) по какой-либо координате, например по q_1, имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_2 \partial q_1}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_3 \partial q_1}\dot{q}_3.$$

С другой стороны, полная производная по времени от производной $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}$ дает

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_3}\dot{q}_3.$$

Из равенства правых частей этих выражений вытекает равенство левых частей, что при обобщении на другие координаты позволяет записать:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_\nu}.$$

Тогда второй член в (a) преобразуется к виду:

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\nu}=\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_\nu}=\frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}=\frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{v^2}{2}. \qquad \text{(d)}$$

Подставляя (c) и (d) в равенство (a), мы получаем окончательные выражения проекций ускорения на оси криволинейных координат:

$$w_\nu=\frac{1}{H_\nu}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\nu}\frac{v^2}{2}-\frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{v^2}{2}\right\} \quad (\nu=1,2,3). \qquad (12)$$

В качестве примера, найдем проекции ускорения на оси полярных координат r и φ на плоскости. В этих координатах по (6—14) будет

$$v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2.$$

Для координаты r имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\frac{v^2}{2}=\dot{r}, \quad \frac{\partial}{\partial r}\frac{v^2}{2}=r\dot{\varphi}^2, \quad H_r=1;$$

для координаты φ

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\frac{v^2}{2}=r^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{v^2}{2}=0, \quad H_\varphi=r.$$

Тогда формулы (12) дают

$$w_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}. \qquad (13)$$

Как и для скорости, ускорение w_r называется *радиальным*, а w_φ — *трансверсальным*.

Плоское движение точки в данный момент времени можно рассматривать как получающееся в результате наложения движения вдоль радиуса-вектора точки со скоростью $\dot{r}$ и движения по окружности радиуса r с угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Первое движение дает радиальное ускорение $\ddot{r}$, второе же — нормальное ускорение $r\dot{\varphi}^2$, направленное противоположно радиусу-вектору, и касательное к окружности ускорение $r\ddot{\varphi}$. Однако простое сложение этих ускорений не дает еще полного ускорения: как видим из (13), в формуле трансверсального ускорения возникает еще дополнительный член $2\dot{r}\dot{\varphi}$, являющийся эффектом одновременного наличия указанных двух движений, когда отличны от нуля как $\dot{r}$, так и $\dot{\varphi}$. Это ускорение называется добавочным или ускорением Кориолиса. Оно будет рассмотрено в дальнейшем при изучении сложного движения точки.

Величина ускорения согласно (12) найдется из формулы

$$w=\sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)^2+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})^2}. \qquad (14)$$

Пример. Точка описывает логарифмическую спираль с уравнением $r = e^{a\varphi}$. В начальном положении $r = r_0$, скорость $v = v_0$. Секториальная скорость постоянна. Найти величину скорости, а также величину и направление ускорения в функции от r.

Имеем

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2; \tag{a}$$

по (6—12) секториальная скорость будет

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi}.$$

Ее постоянство дает

$$r^2\dot{\varphi} = c,$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}. \tag{b}$$

Из уравнения спирали находим

$$\dot{r} = ae^{a\varphi}\dot{\varphi} = ar\dot{\varphi} = \frac{ac}{r}. \tag{c}$$

Таким образом, из (a) будем иметь

$$v^2 = \frac{a^2c^2}{r^2} + \frac{c^2}{r^2} = \frac{c^2(a^2+1)}{r^2}.$$

Подставляя сюда начальные данные, получаем

$$c^2(a^2+1) = r_0^2v_0^2. \tag{d}$$

Следовательно,

$$v^2 = \frac{r_0^2v_0^2}{r^2}$$

и

$$v = \frac{r_0v_0}{r}.$$

Для подсчета w_r и w_φ найдем $\ddot{r}$ и $\ddot{\varphi}$. Из (c) имеем

$$\ddot{r} = -\frac{ac}{r^2}\dot{r} = -\frac{a^2c^2}{r^3}, \tag{e}$$

а из (b) и (c)

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2c}{r^3}\dot{r} = -\frac{2ac^2}{r^4}. \tag{f}$$

С помощью (b), (c), (d), (e) и (f) находим

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{a^2c^2}{r^3} - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{c^2(a^2+1)}{r^3} = -\frac{r_0^2v_0^2}{r^3},$$

$$w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -\frac{2ac^2}{r^3} + \frac{2ac^2}{r^3} \equiv 0.$$

Таким образом, ускорение направлено к началу координат, то есть к полюсу спирали, и имеет величину

$$w = |w_r| = \frac{r_0^2v_0^2}{r^3}.$$

Глава 2

КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 8. Некоторые общие сведения и простейшие виды движения твердого тела

1. Число степеней свободы абсолютно твердого тела. Мы определили ранее абсолютно твердое тело как неизменяемую систему, то есть как систему, в которой взаимные расстояния принадлежащих к ней точек остаются неизменными при движении тела. Легко видеть, что положение абсолютно твердого тела в пространстве можно определить положением трех его точек, не лежащих на одной прямой. В самом деле, закрепляя две точки тела, мы дадим ему еще возможность вращаться вокруг оси, проходящей через эти точки, а закрепив еще одну точку, не лежащую на этой оси, мы полностью остановим тело.

Девять координат этих трех точек связаны тремя независимыми условиями неизменяемости расстояний l_{ik} между точками (i, k — номера точек)

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = l^2_{ik} = \text{const}. \qquad \text{(а)}$$

Поэтому независимых будет только шесть координат, которые и будут определять положение точек, а следовательно, и всего твердого тела (условимся в дальнейшем ради краткости слово „абсолютно" по большей части опускать).

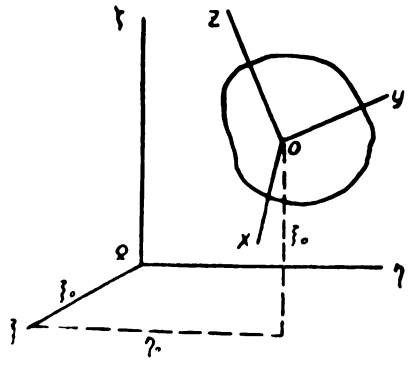
Движение всякой точки тела будет определяться движением выбранных трех его точек. В самом деле, координаты точки будут связаны с координатами указанных точек тремя формулами вида (а); следовательно, найдя закон движения трех основных точек, мы из трех соотношений вида (а) найдем закон движения и любой другой точки тела.

Система материальных точек, движение которой не ограничено никакими препятствиями и вообще не связано никакими условиями, называется свободной, в противном же случае—несвободной.

У несвободной системы координаты ее точек оказываются связанными некоторыми условиями, как мы это только что видели на примере абсолютно твердого тела. Возможно также существование условий, налагаемых на скорости точек; если таких условий нет (что мы и будем предполагать в этом отделе), то число независимых координат, определяющих положение системы, называется числом степеней свободы системы.

Предыдущее рассуждение говорит о том, что свободное абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы. Во всяком же частном случае, в котором вводится какое-либо стеснение свободы движения тела, число степеней свободы будет меньше шести.

2. Определение положения твердого тела. На практике положение твердого тела удобнее определять не с помощью шести независимых координат трех точек, а с помощью некоторых других шести параметров. С этой целью введем две системы координат: неподвижную $\Omega\xi\eta\zeta$, относительно которой изучается движение тела, и подвижную $Oxyz$, неизменно связанную с телом (фиг. 14). За начало подвижной системы берется произвольная точка тела O, которую мы будем называть полюсом, считая ее далее фиксированной. Тогда очевидно, что если в какой-либо момент времени мы будем знать координаты полюса ξ_0, η_0 и ζ_0, а также углы, образуемые подвижными осями с неподвижными, то тем самым будет известно положение тела в этот момент. Косинусы этих девяти углов связаны между собой шестью независимыми условиями: тремя условиями взаимной ортогональности осей $Oxyz$ и тремя условиями для сумм квадратов направляющих косинусов каждой из этих осей. Следовательно, независимыми будут только три угла, которые и можно принять в качестве дополнительных параметров определяющих положение тела. Можно также за такие параметры принять любые три независимых между собой угла, через которые выражаются все девять направляющих косинусов подвижных осей. Предпочтительное применение здесь получили так называемые углы Эйлера, известные из аналитической геометрии.



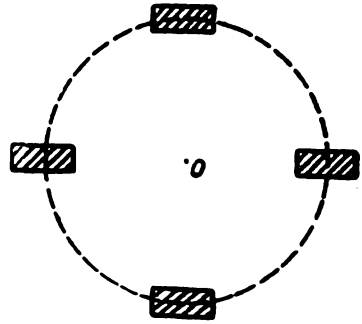
Фиг. 14.

Таким образом, три координаты полюса и три угла Эйлера позволяют определить положение свободного абсолютно твердого тела. Мы не будем, однако, пользоваться сейчас углами Эйлера, оставляя их применение до динамики.

Всякий раз, когда это понадобится, будем считать движущееся тело так же, как и „тело отсчета", продолженным во все стороны насколько это нам требуется. Таким образом, если говорить точнее, мы будем здесь рассматривать движение одной неизменяемой среды относительно другой, принимаемой за неподвижную.

Изучение кинематики абсолютно твердого тела начнем с простейших движений—поступательного движения и вращения вокруг оси.

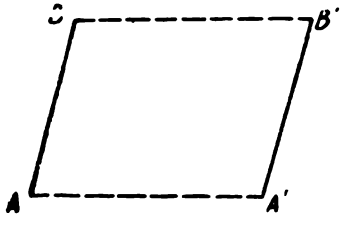
3. Поступательное движение абсолютно твердого тела. *Движение твердого тела называется поступательным, если тело движется так, что всякая неизменно связанная с ним прямая перемещается параллельно самой себе.*



Фиг. 15.

При этом отдельная точка тела может двигаться самым произвольным образом. Так, например, изображенное на фиг. 15 движение прямоугольной фигуры в ее плоскости, когда каждая ее сторона перемещается параллельно самой себе, будет поступательным, каждая же точка описывает некоторую круговую траекторию.

Пусть AB есть положение некоторого связанного с телом прямолинейного отрезка в момент времени t (фиг. 16), а $A'B'$ — положение того же отрезка в другой момент t'. По свойству неизменности расстояний точек абсолютно твердого тела $A'B' = AB$, а по определению поступательного движения эти отрезки параллельны. Поэтому изображенный на чертеже четырехугольник есть параллелограмм. Тогда равенство и параллельность двух других сторон параллелограмма говорит о том, что векторы перемещений точек A и B $\Delta r_A = \overline{AA'}$ и $\Delta r_B = \overline{BB'}$ за промежуток времени $\Delta t = t' - t$ равны друг другу, откуда вытекает, что



Фиг. 16.

$$\frac{\Delta r_A}{\Delta t} = \frac{\Delta r_B}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, находим для скоростей

$$v_A = v_B = v.$$

Из произвольности выбора отрезка AB, а следовательно, и концевых его точек, вытекает тогда, что *при поступательном движении твердого тела векторы скоростей всех его точек в данный момент времени равны между собой.*

Очевидно, что имеет место и обратное положение, то есть, если в каждый момент времени скорости всех точек тела одинаковы, то тело движется поступательно. Таким образом, только в данном случае можно говорить о скорости тела как целого, причем вектор скорости v будет свободным вектором, который можно считать приложенным в любой точке тела. Траектории точек тела будут при этом конгруэнтными кривыми, то есть при наложении друг на друга они совпадут всеми своими точками.

Дифференцируя (1) по времени, найдем

$$\frac{dv_A}{dt} = \frac{dv_B}{dt} = \frac{dv}{dt},$$

то есть

$$w_A = w_B = w.$$

Следовательно, *при поступательном движении и ускорения всех точек тела в каждый момент времени равны друг другу*, и вектор ускорения тоже будет вектором свободным.

Из всего сказанного вытекает, что при поступательном движении все точки тела движутся одинаково, и движение одной точки тела определяет движение всего тела. Так как положение одной точки определяется тремя координатами, то твердое тело в данном случае имеет три степени свободы.

4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. *Если при движении твердого тела некоторая связанная с телом прямая остается неподвижной, то такое движение называется вращением тела вокруг оси, а упомянутая прямая—осью вращения.*

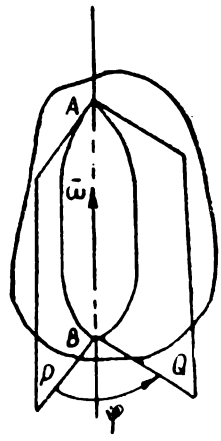
Очевидно, что для осуществления такого движения достаточно потребовать неподвижности только двух точек тела A и B, лежащих на упомянутой оси.

Возьмем какую-либо точку тела M и проведем через нее плоскость, перпендикулярную оси вращения. Так как расстояния MA и MB точки M от точек оси A и B должны оставаться неизменными, то точка M будет двигаться по окружности, лежащей в упомянутой плоскости и имеющей центр на оси вращения.

Проведем через ось вращения две плоскости: неподвижную P и подвижную Q, неизменно связанную с телом (фиг. 17). Двугранный угол φ между этими плоскостями будет определять положение тела в данный момент. Следовательно, в данном случае тело имеет одну степень свободы.

Пусть за промежуток времени Δt тело повернется на угол $\Delta\varphi$, тогда отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ может быть названо средней угловой скоростью тела за этот промежуток. Предполагая существование предела этого отношения*), имеем

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi}. \qquad (2)$$



Фиг. 17.

Эту величину принято называть *угловой скоростью* вращения тела в данный момент.

Желательно, однако, угловую скорость определить так, чтобы одновременно оказались известными как ориентация оси вращения в пространстве, так и направление вращения тела. Поэтому угловую скорость рассматривают как скользящий вектор $\bar{\omega}$, расположенный на оси вращения и направленный в такую сторону, смотря с которой мы видели бы вращение тела происходящим против стрелки часов. Формула же (2) будет определять тогда величину этого вектора.

Обозначим через ρ расстояние некоторой точки M тела от оси вращения. Тогда ρ окажется радиусом круговой траектории точки, и поэтому скорость точки M, направленная в сторону вращения тела, будет иметь согласно (6—16) величину

$$v = \rho\omega. \qquad (3)$$

Возьмем произвольную точку оси вращения O за начало системы координат (фиг. 18). Формула (3) говорит о том, что скорость точки M равна величине момента вектора $\bar{\omega}$ относительно этой точки, а из чертежа фиг. 18 убеждаемся, что и по направлению скорость совпадает с этим моментом. Таким образом

$$\bar{v} = \overline{MO} \times \bar{\omega} = -\bar{r} \times \bar{\omega},$$

*) Не повторяя в дальнейшем этой оговорки, будем считать все встречающиеся функции дифференцируемыми, что вытекает из непрерывности элементов движения. Исключение составит только явление удара тел.

так что векторное представление скорости будет

$$v = \omega \times r. \tag{4}$$

Пусть проекции вектора $\bar{\omega}$ на оси координат будут p, q, r. Тогда формулу (4) можно переписать в виде

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

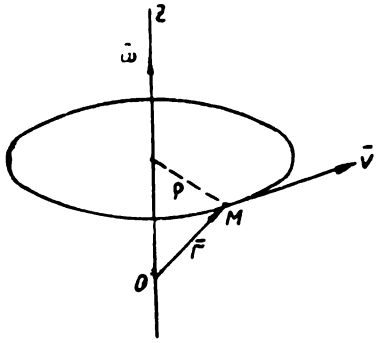
Отсюда находим формулы Эйлера для проекций скорости на оси координат:

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx. \tag{5}$$

В частном случае, когда за ось z принята ось вращения тела, будем иметь $p = q = 0$, $r = \omega$, и выражения (5) принимают вид:

$$v_x = -\omega y, \qquad v_y = \omega x,$$

$$v_z = 0. \tag{6}$$



Фиг. 18.

Дифференцируя (4) по времени и учитывая, что $\dot{r} = v$, находим для ускорения любой точки тела:

$$w = \dot{\omega} \times r + \omega \times v. \tag{7}$$

Так как в данном случае вектор ω может изменяться только по своей величине, то вектор $\Delta\omega$ изменения вектора ω, а следовательно, и вектор *углового ускорения* тела

$$\dot{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

лежит на оси вращения. При этом, если вращение тела ускоряется, направление вектора $\dot{\omega}$ совпадает с направлением ω, при замедлении же вращения оно будет противоположно ω. Тогда, учитывая направления отдельных векторов, а также то, что $r \sin(\dot{\omega}, r) = \rho$, легко установить, что первый член выражения (7)

$$w_1 = \dot{\omega} \times r \tag{8}$$

есть тангенциальное ускорение точки тела при ее движении по круговой траектории, имеющее величину

$$w_1 = \dot{\omega}\rho, \tag{8'}$$

а второй член

$$w_2 = \bar{\omega} \times v \tag{9}$$

— нормальное ускорение в том же круговом движении с величиной

$$w_2 = \omega^2 \rho. \qquad (9')$$

Величина полного ускорения будет

$$w = \rho \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4},$$

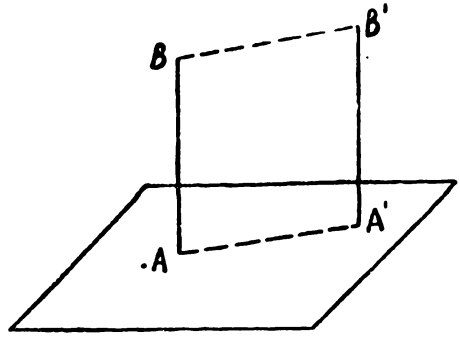
как и во всяком круговом движении.

Заметим, что ускорение w_1 может быть направлено как по скорости, так и противоположно ей, в зависимости от знака $\dot{\omega}$ (или направления $\dot{\omega}$), как об этом было сказано при рассмотрении движения точки по окружности.

§ 9. Плоско-параллельное движение твердого тела

1. Определение, сведение к движению плоской фигуры. *Плоско-параллельным называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости.*

Легко видеть, что при этом движении точки тела, расположенные в данный момент на одном перпендикуляре к упомянутой неподвижной плоскости, будут оставаться во все время движения на перпендикуляре к ней. В самом деле, если взять какой-либо отрезок AB такого перпендикуляра (фиг. 19), то во всяком другом положении $A'B'$ длина



Фиг. 19.

отрезка по основному свойству абсолютно твердого тела должна остаться неизменной, так что $A'B' = AB$. С другой же стороны, перемещения AA' и BB' по определению перпендикулярны к AB и параллельны неподвижной плоскости; но тогда они должны быть параллельными между собой, ибо иначе было бы $A'B' > AB$. Поэтому фигура $ABB'A'$—

прямоугольник, и $A'B'$ является перпендикуляром к плоскости.

Из этого вытекает, что движение всех точек, лежащих на перпендикуляре к неподвижной плоскости, определяется движением одной из этих точек; поэтому движение всего тела можно определить движением любого его сечения, параллельного неподвижной плоскости, в плоскости этого сечения. Тем самым изучение данного движения тела сводится к изучению движения неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости.

Говоря о движении плоской фигуры, мы будем, как и в общем случае движения твердого тела, в случае необходимости представлять ее себе продолженной во все стороны, насколько это потребуется. Таким образом, строго говоря, мы будем изучать движение *подвижной* плоскости, неизменно связанной с движущейся фигурой, относительно *неподвижной* плоскости.

Если нам известно положение одной точки фигуры, то последняя может еще занимать любое положение, получающееся поворотом фигуры вокруг этой точки. Если же мы зададим положение еще одной точки, то возможность поворота будет исключена, и положение фигуры будет известным. Таким образом, *положение неизменяемой фигуры в ее плоскости определяется положением двух ее точек, или иначе—положением прямолинейного отрезка, соединяющего любые две точки фигуры.*

Беря в неподвижной плоскости плоскую систему декартовых координат, мы можем положение каждой точки фигуры определить двумя координатами. Так как четыре координаты двух точек связаны одним условием неизменности расстояния между ними, то независимых координат будет три. Поэтому при плоско-параллельном движении твердое тело имеет три степени свободы.

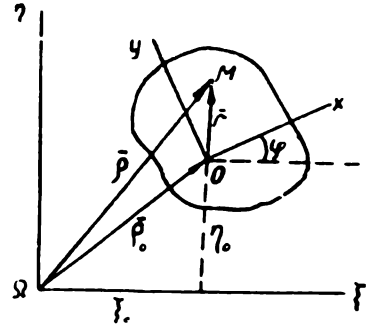
2. Скорости точек плоской фигуры. Выберем в плоскости движения неподвижную систему отсчета $\Omega\xi\eta$ (фиг. 20) и подвижную Oxy, неизменно связанную с плоской фигурой и имеющую начало в произвольно выбранной точке O, которую, как мы договорились ранее, будем называть полюсом.

Обозначим через ξ_0 и η_0 координаты полюса в неподвижной системе; кроме того, введем угол φ, составленный осью Ox с осью $\Omega\xi$. Зная эти три параметра как функции времени, мы можем полностью определить движение фигуры. В самом деле, функции $\xi_0(t)$ и $\eta_0(t)$ дадут движение фигуры вместе с точкой O, то есть ее поступательное движение, а зависимость $\varphi = \varphi(t)$ определит вращение фигуры вокруг этой точки. Число независимых параметров, определяющих положение фигуры в каждый момент времени,

оказалось, как видим, равным трем, то есть как раз числу степеней свободы системы.

Пусть ρ_0 есть радиус-вектор полюса относительно начала неподвижной системы отсчета, ρ — радиус-вектор произвольной точки M фигуры относительно того же начала; обозначим через r радиус-вектор этой же точки относительно полюса O. Тогда во все время движения между этими радиусами-векторами будет выполняться соотношение

$$\rho = \rho_0 + r. \qquad (1)$$



Фиг. 20.

Отсюда, дифференцируя это равенство по времени, найдем скорость точки M:

$$v = \dot{\rho} = \dot{\rho}_0 + \dot{r}.$$

Вектор $\dot{\rho}_0 = v_0$ будет скоростью полюса O. Вектор r, в силу неизменности взаимных расстояний точек фигуры не изменяется по величине, а только вращается вокруг точки O. А так как в пространстве это есть вращение вокруг оси Oz, перпендикулярной плоскости чертежа, то $\dot{r}$ будет чисто вращательной скоростью, определяемой по (8—4) в виде

$$\dot{r} = \omega \times r, \qquad (2)$$

где вектор угловой скорости ω направлен по Oz и имеет проекцию на эту ось в натуральную величину $\omega = \dot{\varphi}$.

Таким образом находим

$$v = v_0 + \omega \times r, \qquad (3)$$

то есть, что скорость произвольной точки фигуры равна геометрической сумме скорости поступательного движения, равной скорости некоторой точки фигуры, и скорости вращательного движения вокруг этой точки.

Формулу (3) можно переписать в виде

$$v = v_0 + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix},$$

откуда получаем проекции скорости точки фигуры на подвижные оси координат в виде

$$v_x = v_{ox} - \omega y, \qquad v_y = v_{oy} + \omega x. \qquad (4)$$

Согласно (1) формулу (3) можно записать в форме

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)$$

или иначе:

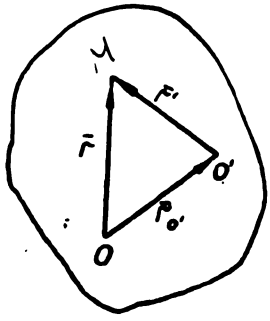
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \begin{vmatrix} \xi^\circ & \eta^\circ & \zeta^\circ \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi - \xi_0 & \eta - \eta_0 & 0 \end{vmatrix},$$

где ξ°, η°, ζ° — орты неподвижных осей координат. Отсюда находим проекции скорости точки на неподвижные оси:

$$v_\xi = \dot{\xi}_0 - \omega(\eta - \eta_0), \qquad v_\eta = \dot{\eta}_0 + \omega(\xi - \xi_0). \tag{5}$$

Здесь $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$ — проекции скорости полюса O.

Выражение (3) для скорости точки говорит о том, что движение плоской фигуры в каждый момент времени можно считать состоящим из двух частей: поступательного движения вместе с полюсом и вращательного вокруг него. Посмотрим, как меняются эти составляющие движения при перемене полюса.



Фиг. 21.

Примем за полюс другую точку O' плоской фигуры (фиг. 21). Пусть $\boldsymbol{r}_{O'}$ радиус-вектор O' относительно прежнего полюса O, $\boldsymbol{r}'$ — радиус-вектор произвольной точки M относительно O', $\boldsymbol{\omega}'$ — угловая скорость фигуры при ее вращении вокруг O'. Тогда скорость точки M будет

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}'. \tag{a}$$

Согласно той же формуле (3)

$$\boldsymbol{v}_{O'} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{O'}, \tag{b}$$

и подстановка этого выражения в (a) дает

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}'.$$

Сличая это выражение с (3), имеем

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

или

$$\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O'}).$$

Но из чертежа фиг. 21 находим

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{O'} = \boldsymbol{r}',$$

так что предыдущее равенство принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'.$$

Поэтому вектор $\boldsymbol{\omega}'$ может отличаться от вектора $\boldsymbol{\omega}$ лишь на некоторый вектор $\boldsymbol{\omega}_1$, коллинеарный с $\boldsymbol{r}'$. А так как вектор $\boldsymbol{\omega}$ при любом полюсе перпендикулярен к плоскости движения, то $\boldsymbol{\omega}_1 = 0$ и $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$. (c)

Равенства (b) и (c) позволяют сделать тот важный вывод, что при перемене полюса меняется лишь поступательное движение фигуры, а вращательное остается неизменным. Следовательно, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в плоско-параллельном движении оказывается одним и тем же при любом полюсе, то есть будет свободным вектором.

3. Мгновенный центр вращения и центроиды. Последний вывод позволяет поставить вопрос, нельзя ли найти такой полюс P, чтобы поступательное движение фигуры совсем исчезло. Это эквивалентно разысканию такой точки плоской фигуры, скорость которой в данный момент равнялась бы нулю. Для этого достаточно в формулах (4) положить $v_x = v_y = 0$, и тогда координаты точки P в подвижной плоскости найдутся из уравнений

$$v_{ox} - \omega y_P = 0, \quad v_{oy} + \omega x_P = 0,$$

откуда

$$x_P = -\frac{v_{oy}}{\omega}, \qquad y_P = \frac{v_{ox}}{\omega}; \tag{6}$$

в неподвижной же плоскости согласно (5) эти координаты определятся уравнениями

$$\dot{\xi}_0 - \omega(\eta_P - \eta_0) = 0, \qquad \dot{\eta}_0 + \omega(\xi_P - \xi_0) = 0,$$

откуда

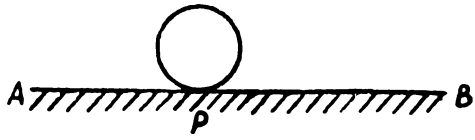
$$\xi_P = \xi_0 - \frac{\dot{\eta}_0}{\omega}, \qquad \eta_P = \eta_0 + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega}. \tag{7}$$

Так как плоская фигура в данный момент времени имеет только вращательное движение вокруг точки P, а скорость точки фигуры, находящейся в полюсе P, равна нулю, то точка, определяемая формулами (6) и (7), называется *мгновенным центром вращения* или *мгновенным центром скоростей*.

Если мгновенный центр скоростей не меняет своего положения в движущейся фигуре, то эта точка фигуры, как имеющая постоянно равную нулю скорость, будет неизменно связана с неподвижной плоскостью, и мгновенный центр превратится в постоянный центр вращения. Отбрасывая этот случай, отвечающий рассмотренному ранее случаю вращения тела вокруг неподвижной оси, мы видим, что в силу непрерывности изменения скоростей точек фигуры положение мгновенного центра вращения будет меняться непрерывным образом и при этом как в неподвижной плоскости, так и в подвижной, движущейся вместе с фигурой. Полу-

чающиеся геометрические места мгновенных центров вращения, являющиеся непрерывными кривыми, называются соответственно *неподвижной и подвижной центроидами* или *полодиями.*

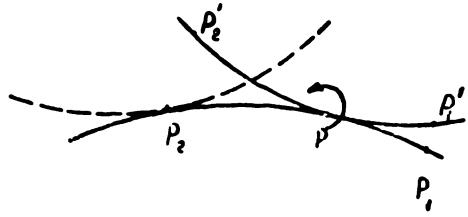
Так, если, например, круглый диск катится без скольжения по неподвижной прямой AB (фиг. 22), то точка P



Фиг. 22.

соприкосновения обода диска с прямой AB, как не имеющая скорости в данный момент, будет мгновенным центром скоростей. С течением времени точка P будет передвигаться вместе с диском по прямой AB, которая и будет поэтому неподвижной центроидой. В то же время при своем качении диск будет касаться прямой AB все новыми и новыми точками своего обода, который окажется в данном случае подвижной центроидой.

Через мгновенный центр вращения, отвечающий данному моменту времени, проходят как неподвижная, так и подвижная центроиды. Нетрудно видеть, что центроиды будут касаться друг друга в этом центре. В самом деле, пусть точка P (фиг. 23) является мгновенным центром вращения



Фиг. 23.

в данный момент t, и вращение происходит в направлении, указанном стрелкой. Допустим, что P_1P_2 есть неподвижная центроида, а $P_1'P_2'$ — подвижная. Тогда, вследствие вращения подвижной центроиды вместе с плоской фигурой, точка этой центроиды, находившаяся в предыдущий момент $t_1 < t$ в мгновенном центре P_1, в момент t отойдет от неподвижной центроиды и займет некоторое положение P_1'. Точно так же принятое направление вращения требует, чтобы точка P_2' подвижной центроиды, которая в следующий момент $t_2 > t$

должна оказаться в мгновенном центре P_2, лежала бы с той же стороны от неподвижной центроиды, что и точка P_1'. Из этого рассуждения вытекает, что в окрестности мгновенного центра вращения подвижная центроида лежит по одну сторону от неподвижной, имея с ней лишь одну общую точку, именно мгновенный центр вращения, который и будет поэтому точкой касания центроид, за исключением возможных случаев особых угловых точек, в которых не будет существовать единственной касательной.

Так как точка подвижной центроиды, находящаяся в данный момент в мгновенном центре скоростей, не имеет скорости, то фиг. 23 показывает также, что подвижная центроида с течением времени будет катиться по неподвижной без скольжения. Отсюда получаем следующую геометрическую интерпретацию: *движение плоской фигуры в ее плоскости можно представить качением без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.*

В уравнениях (6) и (7) правые части являются функциями времени; иногда их можно представить как функции некоторого параметра, зависящего от времени. Поэтому эти уравнения можно рассматривать также как параметрические уравнения неподвижной и подвижной центроид. Исключая из них время или упомянутый параметр, можно уравнения центроид получить в форме:

$$F(x_P, y_P) = 0, \qquad \Phi(\xi_P, \eta_P) = 0,$$

где F, Φ — некоторые функции своих аргументов.

4. Определение положения мгновенного центра вращения и скоростей точек фигуры. Скорости точек плоской фигуры найдутся из того соображения, что мгновенный центр скоростей может рассматриваться как центр окружности, по которой в данный момент движется каждая точка фигуры и радиус которой равен расстоянию r данной точки от мгновенного центра. Тогда по (6—16) для величины скорости любой точки будем иметь

$$v = r\omega, \tag{8}$$

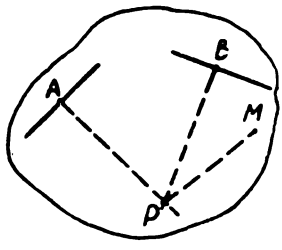
где ω — общая угловая скорость для всех точек, равная угловой скорости фигуры; вектор скорости будет направлен по касательной к упомянутой окружности, то есть перпендикулярно отрезку r, в сторону вращения фигуры.

Таким образом, для определения скоростей точек фигуры важно уметь находить положение мгновенного центра вращения. Это, помимо использования формул (6) и (7), можно сделать одним из следующих трех способов:

1. Если из физических условий задачи можно указать точку плоской фигуры, скорость которой в данный момент

равна нулю, то эта точка, как уже упоминалось выше, и будет мгновенным центром вращения.

2. Допустим, что нам известны линии действия векторов скоростей двух точек A и B фигуры, не параллельные друг другу (фиг. 24). Тогда, в соответствии с установленным выше направлением скоростей, мы можем утверждать, что мгновенный центр P лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных к линиям действия скоростей в точках A и B.

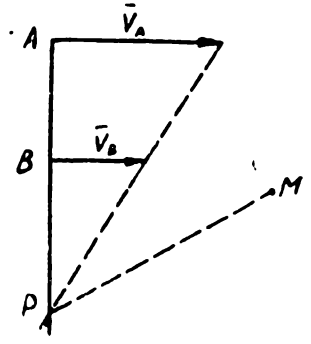


Фиг. 24.

3. При параллельности скоростей двух точек возможны два случая.

a) Если эти точки не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то точка пересечения перпендикуляров уходит в бесконечность, так что в формуле (8) следует устремить r к бесконечности; поэтому в пределе угловая скорость $\omega = \frac{v}{r}$ окажется равной нулю. Следовательно, в этом случае движение фигуры может быть только мгновенным поступательным, и скорости взятых двух точек должны равняться друг другу.

b) Согласно (8) скорости точек прямой, проходящей через мгновенный центр вращения, перпендикулярны к ней и имеют величину, пропорциональную расстоянию от мгновенного центра. Поэтому концы векторов скоростей лежат на общей прямой, пересекающей первую прямую в мгновенном центре вращения. Отсюда вытекает, что для определения мгновенного центра вращения в том случае, когда точки A и B (фиг. 25) лежат на общем перпендикуляре к скоростям, нужно знать величины этих скоростей. Если эти скорости не равны, то, проводя прямую через концы векторов скоростей, мы найдем мгновенный центр как точку пересечения P этой прямой с перпендикуляром AB или его продолжением. Если же $v_A = v_B$, то точка P уйдет в бесконечность, и мы получим мгновенное поступательное движение.



Фиг. 25.

Угловую скорость вращения фигуры находим по одной из известных скоростей

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB};$$

это позволяет далее найти скорость любой точки M плоской фигуры по формуле (8)

$$v_M = \omega . PM.$$

Если же линии действия скоростей двух точек фигуры не параллельны между собой, то для определения скоростей любых точек фигуры достаточно еще знать величину только одной из скоростей. Например, если будет известна величина v_A скорости точки A (фиг. 24), то по ней находим

$$\omega = \frac{v_A}{PA},$$

откуда скорость точки B, а также всякой другой точки фигуры M найдется по формулам:

$$v_B = \omega . PB, \qquad v_M = \omega . PM.$$

При этом все скорости будут направлены перпендикулярно лучам PM в сторону вращения фигуры, происходящего в соответствии с направлением скорости v_A точки A.

В заключение заметим, что, выявляя геометрические свойства, которыми обладают различные положения мгновенного центра скоростей в неподвижной и подвижной плоскостях, мы можем найти вид как неподвижной, так и подвижной центроиды.

Для нахождения подвижной центроиды иногда пользуются методом обращения движения, считая подвижную плоскость неподвижной, а прежнюю неподвижную плоскость — движущейся. Определенная для этого движения неподвижная центроида и явится подвижной для истинного движения.

Пример. Концы линейки эллипсографа AB (фиг. 26) скользят по сторонам прямого угла Oxy. Определить скорость средней точки C линейки в момент, когда скорость точки A равна 30 *см/сек*, а линейка составляет угол 30° с осью Ox. Найти также центроиды для данного движения.

Скорости точек A и B направлены по сторонам прямого угла. Поэтому, восстанавливая перпендикуляры AP и BP к этим сторонам, находим мгновенный центр вращения линейки как точку P пересечения этих перпендикуляров. Тогда

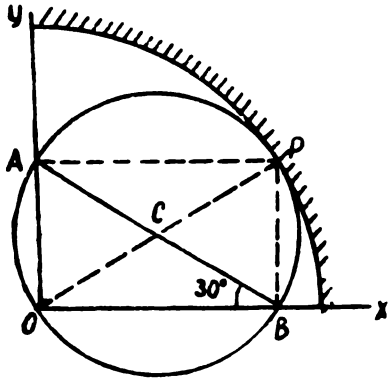
$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{l \cdot \cos 30^\circ} = \frac{30 \cdot 2}{l\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{l} \frac{1}{сек}.$$

Так как $PC = \frac{l}{2}$, то скорость точки C будет

$$v = \omega \cdot \frac{l}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3 \text{ см/сек}.$$

Далее видим, что при любом положении линейки мгновенный центр вращения P лежит на одном и том же расстоянии $OP=l$ от точки O. Поэтому неподвижной центроидой в данном случае будет окружность радиуса l с центром в точке O. Относительно же движущейся линейки положение мгновенного центра будет обладать тем свойством, что его расстояние от средины линейки $PC=\frac{l}{2}$ остается постоянным во все время движения. Следовательно, подвижной центроидой здесь будет окружность радиуса $\frac{l}{2}$ с центром в точке C. Движение линейки можно представить качением этой второй окружности по первой с ее внутренней стороны.

5. Кинематические пары и цепи; механизм; плоский и шарнирный четырехугольник. Кинематика плоско-параллельного движения твердого тела находит большое применение в теории различных плоских механизмов.



Фиг. 26.

Простейшим понятием теории механизмов является понятие о *кинематической* паре. Такое название имеет совокупность двух тел, остающихся во время движения в постоянном соприкосновении и взаимно определяющих движение относительно друг друга. При этом основное применение в машиностроении нашли так называемые *низшие* кинематические пары, в которых соприкосновение тел (*элементов пары*) происходит по поверхностям, а не по линиям или в отдельных точках, как у высших кинематических пар.

Основным типом низшей кинематической пары является *винтовая пара*; так называется пара, у которой относительное движение одного элемента состоит из вращения его вокруг оси и поступательного движения вдоль той же оси; к низшим парам относятся также предельные случаи винтовой пары—*вращательная и поступательная пары*, когда остается лишь одно из указанных составляющих винтового движения. Типичным примером винтовой пары является соединение винта и гайки; круговой цилиндр, вращающийся внутри полого цилиндра того же радиуса и не имеющий возможности перемещаться вдоль своей оси, вместе с этим вторым цилиндром образует вращательную пару; наконец, пара призм, из которых одна может скользить внутри другой параллельно своим граням, образует поступательную пару.

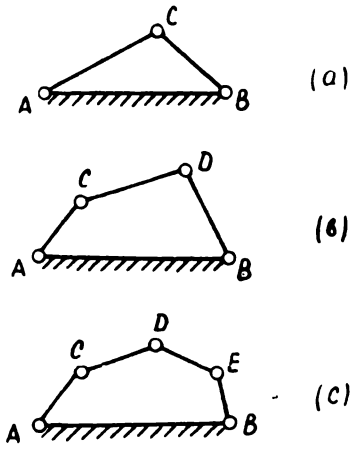
Если один элемент пары соединить жестко с одним из элементов другой пары, второй элемент этой пары—с элементом третьей пары и т. д., то полученная таким путем совокупность взаимно соединенных пар называется *кинематической цепью*, а жесткие соединения двух элементов различных пар—*звеньями* кинематической цепи. Если последний элемент последней пары соединить жестко с первым элементом первой пары, то такая кинематическая цепь называется *замкнутой*.

Пусть в замкнутой кинематической цепи движение всякого звена относительно любого другого будет вполне определенным. Такая цепь называется замкнутой кинематической цепью принужденного движения. Закрепим теперь одно из звеньев цепи; тогда остальные звенья могут

двигаться только вполне определенным образом; такая цепь называется *механизмом*. Таким образом, *механизмом называется замкнутая кинематическая цепь принужденного движения, у которой одно из звеньев сделано неподвижным*, то есть, как говорят, обращено в стойку.

Механизмы, у которых все звенья могут двигаться только параллельно одной неподвижной плоскости, называются плоскими. Положение звена плоского механизма, примыкающего к стойке, мы можем определить одним углом, который некоторая неизменно связанная со звеном прямая образует с какой-либо неподвижной прямой. А так как в силу определенности движения механизма каждому значению этого угла должно отвечать единственное положение всего механизма, то плоский механизм является системой тел, имеющей одну степень свободы.

Рассмотрим, например, плоские шарнирные соединения стержней, указанные на фиг. 27, с одним неподвижным звеном AB. Система (*a*) не является механизмом, ибо она не имеет ни одной степени свободы. Не является механизмом и система (*c*), как имеющая две степени свободы; в самом деле при фиксированном положении звена AC остальные три подвижных звена могут иметь еще некоторое движение. Механизмом является лишь система (*b*), составленная из четырех шарнирно соединенных стержней Этот механизм называется *плоским шарнирным четырехугольником* и в различных модификациях является основной частью многих машин.



Фиг. 27.

Рассмотрим шарнирный четырехугольник подробнее. Здесь мы имеем четыре вращательных пары, соединенных между собой жесткими стержнями. Звено CD, противоположное стойке, называется *шатуном*; звено же AC или BD, прилегающие к стойке, — *кривошипом*, если оно может совершать полный оборот вокруг своей оси A или B, и *коромыслом*, если оно может только качаться около этой оси, не делая полного оборота.

Если известна скорость одной какой-либо точки звена AC, то можно найти скорости всех точек четырехугольника. Так, зная скорость точки C, скорости остальных точек звена AC найдем как пропорциональные расстоянию от центра A вращения звена.

Найдем теперь скорости точек шатуна CD. Скорости точек C и D перпендикулярны стержням AC и BD (фиг. 28), поэтому мгновенный центр вращения для звена CD окажется лежащим в точке пересечения P продолжений стержней AC и BD. Пусть ω_1 — угловая скорость звена AC, ω_2 — звена CD. Тогда скорость точки C как принадлежащей одновременно обоим этим звеньям, будет

$$v_C = \omega_1 AC = \omega_2 PC,$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{AC}{PC},$$

где

$$\omega_1 = \frac{v_C}{AC}$$

— известная величина. Тогда скорость любой точки K звена CD найдется в виде

$$v_K = \omega_2 PK = \omega_1 PK \frac{AC}{PC}.$$

Проведем отрезок Ak, параллельный PK. Из подобия треугольников ACk и PCK имеем

$$\frac{Ak}{PK} = \frac{AC}{PC}, \quad PK\frac{AC}{PC} = Ak,$$

так что скорость v_K может быть переписана в виде

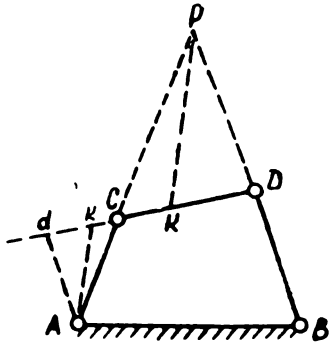
$$v_K = \omega_1 \cdot Ak.$$

Проводя такие же рассуждения для точки D, найдем, что

$$v_D = \omega_1 . Ad.$$

где Ad параллельно PD.

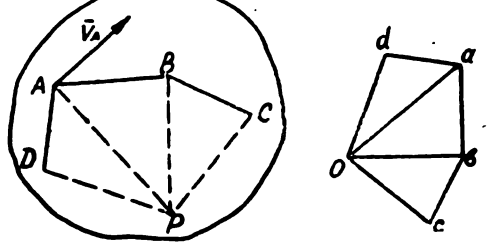
Таким образом, скорости точек звена CD найдутся как пропорциональные отрезкам, проведенным из точки A до пересечения с линией Cd и параллельным мгновенным радиусам вращения точек этого звена. По скорости v_D найдутся затем и скорости всех точек звена BD.



Фиг. 28.

6. План скоростей. Скорости точек плоской фигуры могут быть удобно определены графически с помощью так называемого плана скоростей.

Пусть известен вектор скорости точки A (фиг. 29) плоской фигуры и положение P мгновенного центра вращения. В плоскости чертежа возьмем произвольную точку O и проведем через нее луч Oa, перпендикулярный PA. Если на этом луче отложить в выбранном масштабе величину скорости v_A, то вектор $\overline{Oa}$ будет вектором скорости v_A точки A. Возьмем другую точку B фигуры и про-



Фиг. 29.

ведем через концы отрезка Oa отрезки Ob и ab, перпендикулярные соответственно PB и AB. Тогда треугольник

Oab окажется подобным треугольнику PAB, откуда

$$\frac{Ob}{PB} = \frac{Oa}{PA} = \frac{v_A}{PA} = \omega,$$

так что $Ob = \omega \cdot PB$, то есть вектор $\overline{Ob}$ будет скоростью точки B как по направлению, так и по величине. Повторяя такие же рассуждения для любых точек фигуры, найдем, что векторы $\overline{Oc}$, $\overline{Od}$ и т. д. окажутся скоростями точек C, D и т. д.

Построенная при точке O фигура называется планом скоростей. План скоростей позволяет определять и относительные скорости точек. В самом деле, имеем из чертежа

$$\overline{ab} = \overline{Ob} - \overline{Oa} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A;$$

как увидим в дальнейшем, такая разность определяет относительную скорость одной точки по отношению к другой, так что вектор $\overline{ab}$ является скоростью точки B относительно точки A. Аналогично найдутся и всякие другие относительные скорости.

7. Ускорение точек плоской фигуры. Дифференцируя выражение (3) по времени, найдем для ускорения произвольной точки фигуры

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \qquad \text{(a)}$$

Здесь $\dfrac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} = \boldsymbol{w}_0$ есть ускорение полюса O или поступательное ускорение фигуры; производная $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ является угловым ускорением фигуры, направленным, как и угловая скорость, перпендикулярно плоскости движения. Используя (2), а также пользуясь известной формулой для двойного векторного произведения, получим

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Но векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{r}$ взаимно ортогональны, так что $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r} = 0$. Поэтому учитывая, что $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega^2$, имеем

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\omega^2 \boldsymbol{r}.$$

Таким образом, выражение (а) принимает вид

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} - \omega^2 \boldsymbol{r}, \qquad (9)$$

или

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}_{12}, \qquad (10)$$

где

$$\boldsymbol{w}_{12} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$$

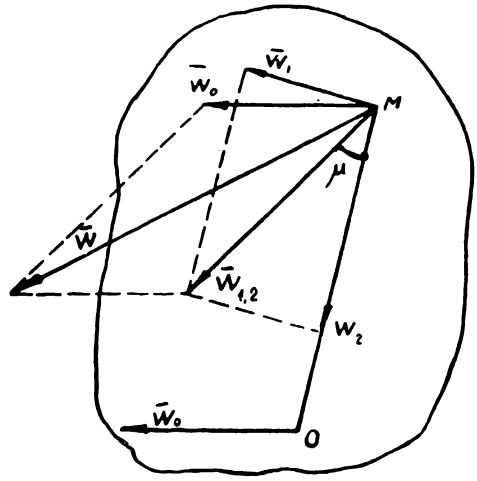
есть составляющая ускорения точки, обязанная вращению фигуры вокруг полюса O. При этом, если построить окружность радиуса r с центром в O, то ускорение $\boldsymbol{w}_1 = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}$, как перпендикулярное к векторам $\boldsymbol{r}$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, будет тангенциальным по отношению к этой окружности и имеющим алгебраическую величину

$$w_1 = \dot{\omega} r; \tag{11}$$

оно будет направлено в сторону вращения при $\dot{\omega} > 0$ и противоположно вращению при $\dot{\omega} < 0$. Ускорение же $\boldsymbol{w}_2 = -\omega^2 \boldsymbol{r}$ будет нормальным к окружности, направленным к ее центру O, и имеющим численное значение

$$w_2 = \omega^2 r. \tag{12}$$

Эти результаты представлены геометрически на фиг. 30, где построено также полное ускорение точки фигуры



Фиг. 30.

и указан угол μ, образуемый вектором вращательного ускорения $\boldsymbol{w}_{12}$ с обратным направлением радиуса-вектора точки. Как видно из чертежа, этот угол определяется равенством

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}, \tag{13}$$

откуда $\mu > 0$ при ускоренном вращении ($\dot{\omega} > 0$) и $\mu < 0$ при замедленном вращении ($\dot{\omega} < 0$). Чертеж фиг 30 отвечает первому случаю. Из формулы (13) следует, что угол μ не

зависит от точки, для которой он рассматривается, а также от выбора полюса, ибо, как мы видели, ω и $\dot{\omega}$ также не зависят от этих факторов.

Формула (10) говорит о том, что, как и скорость, *ускорение произвольной точки фигуры равно геометрической сумме ускорений поступательного движения, происходящего вместе с некоторой точкой фигуры, и вращательного движения вокруг этой точки.*

Так как векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ коллинеарны, то по формуле (9) найдем проекции ускорения на оси подвижной системы координат в виде

$$w_x = w_{ox} - \dot{\omega}y - \omega^2 x, \quad w_y = w_{oy} + \dot{\omega}x - \omega^2 y. \tag{14}$$

Заменяя в (9) $\boldsymbol{r}$ по (1) и проектируя получающееся выражение

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_o) - \omega^2 (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_o)$$

на неподвижные оси координат, получим проекции ускорения на эти оси:

$$\left.\begin{aligned} w_\xi &= \ddot{\xi}_o - \dot{\omega}(\eta - \eta_o) - \omega^2(\xi - \xi_o), \\ w_\eta &= \ddot{\eta}_o + \dot{\omega}(\xi - \xi_o) - \omega^2(\eta - \eta_o). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

8. Ускорение мгновенного центра скоростей. Если отбросить случай вращения плоской фигуры относительно неподвижной точки, то легко показать, что точка движущейся плоской фигуры, находящаяся в данный момент в мгновенном центре скоростей, имеет отличное от нуля ускорение. С этой целью обратимся к чертежу фиг. 23.

Пусть в момент времени t плоская фигура вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг мгновенного центра скоростей P, а в момент $t + \Delta t$ — с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} + \Delta\boldsymbol{\omega}$ вокруг близкого к P положения P_2 того же центра. Тогда вектор $\Delta\boldsymbol{s} = \overrightarrow{PP_2}$ явится вектором перемещения этого центра по неподвижной центроиде за время Δt, так что величина

$$\boldsymbol{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{s}}{dt}$$

будет скоростью движения мгновенного центра P по неподвижной центроиде в момент t.

Точка P' движущейся фигуры, находившаяся в момент t в мгновенном центре скоростей P, относительно центра P_2 будет иметь радиус-вектор, отличающийся от $(-\Delta\boldsymbol{s})$ на малую второго порядка (как известно из геометрии). Пренебрегая этой величиной, найдем, что в момент $t + \Delta t$ точка P' получит скорость

$$(\boldsymbol{\omega} + \Delta\boldsymbol{\omega}) \times (-\Delta\boldsymbol{s}).$$

Так как в момент t скорость точки P' равнялась нулю, то эта же величина будет и приращением скорости Δv точки P' за время Δt. Отсюда следует, что точка P' в момент t имеет ускорение

$$w_P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-(\omega + \Delta\omega) \times \Delta s}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу и отбрасывая в числителе малую второго порядка, находим

$$w = -\left(\omega \times \frac{ds}{dt}\right) = -(\omega \times u) \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Для практических целей важно установить направление полученного ускорения. Вектор u направлен по касательной к неподвижной центроиде в сторону точки P_2, а вектор ω — перпендикулярно к плоскости движения от чертежа к нам. Тогда, в соответствии с правилом определения направления векторного произведения, убеждаемся, что ускорение точки P', то есть, как можно сказать, *ускорение мгновенного центра скоростей направлено по общей нормали к центроидам в сторону подвижной центроиды.*

9. Мгновенный центр ускорений. Точка плоскости, в которой ускорение находящейся в ней точки подвижной фигуры равно нулю, называется *мгновенным центром ускорений.* Определение этой точки имеет важное значение для теории плоских механизмов.

Полагая в формулах (14) и (15) ускорение равным нулю, найдем для координат искомого центра Q в подвижной плоскости уравнения:

$$w_{ox} - \dot{\omega} y_Q - \omega^2 x_Q = 0, \quad w_{oy} + \dot{\omega} x_Q - \omega^2 y_Q = 0,$$

а в неподвижной:

$$\ddot{\xi}_o - \dot{\omega}(\eta_Q - \eta_o) - \omega^2(\xi_Q - \xi_o) = 0,$$

$$\ddot{\eta}_o + \dot{\omega}(\xi_Q - \xi_o) - \omega^2(\eta_Q - \eta_o) = 0.$$

Отсюда координаты мгновенного центра ускорений в неподвижной плоскости будут

$$\left.\begin{aligned} \xi_Q &= \xi_o - \frac{\ddot{\eta}_o \dot{\omega} - \ddot{\xi}_o \omega^2}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}, \\ \eta_Q &= \eta_o + \frac{\ddot{\xi}_o \dot{\omega} + \ddot{\eta}_o \omega^2}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

а в подвижной —

$$x_Q = \frac{-w_{Oy}\dot{\omega} + w_{Ox}\omega^2}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}, \quad y_Q = \frac{w_{Ox}\dot{\omega} + w_{Oy}\omega^2}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}. \tag{17}$$

С помощью мгновенного центра ускорений можно весьма просто представить распределение ускорений в точках подвижной фигуры. Именно, если $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор какой-либо точки относительно этого центра, то согласно (9) ускорение точки будет

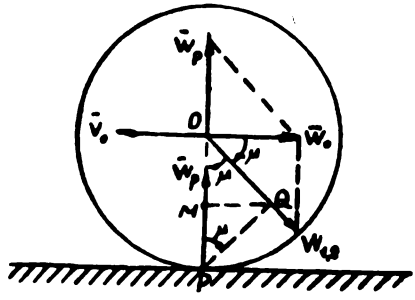
$$\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} - \omega^2 \boldsymbol{r}. \tag{18}$$

Так как составляющие этого ускорения взаимно ортогональны, а их величины определяются формулами (11) и (12), то для величины ускорения имеем

$$w = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}, \tag{19}$$

то есть она будет пропорциональна расстоянию от мгновенного центра ускорений. Векторы ускорений всюду составят один и тот же угол μ с лучом, проведенным из данной точки в мгновенный центр ускорений.

Пример. Диск радиуса $a = 0{,}5$ *м* катится без скольжения по прямой, его центр O имеет в данный момент скорость $v_0 = 0{,}5$ *м/сек* и замедление $w_0 = 0{,}5$ *м/сек*^{2}. Найти мгновенный центр ускорений диска, ускорение w_P точки колеса, совпадающей с мгновенным центром скоростей, а также ускорение средней точки M отрезка OP и радиус кривизны ее траектории.



Фиг. 31.

Мгновенный центр скоростей находится в точке P соприкосновения диска с прямой (фиг. 31). Так как прямая есть неподвижная центроида, а обод диска—подвижная, то ускорение $\boldsymbol{w}_P$ точки P диска, как направленное по общей нормали к центроидам в сторону подвижной центроиды, пойдет по радиусу диска к его центру.

Примем точку P за полюс. Тогда ускорение точки O составится из ускорения $\boldsymbol{w}_P$, тангенциального относительно P ускорения $\boldsymbol{w}_1$ и нормального или центростремительного $\boldsymbol{w}_2$, направленного к полюсу P. Так как в действительности имеется лишь ускорение замедления $\boldsymbol{w}_0$, тангенциальное относительно P, то противоположно направленные ускорения $\boldsymbol{w}_P$ и $\boldsymbol{w}_2$ взаимно уничтожаются. Таким образом, согласно формулам (11) и (12) будем иметь:

$$w_P = w_2 = a\omega^2, \quad w_1 = a\dot{\omega} = -w_0. \tag{a}$$

Второе равенство дает

$$\dot{\omega} = -\frac{w_0}{a} = -1\,\frac{1}{сек^2}.$$

Для скорости точки O согласно (8) имеем

$$v_0 = a\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{v_0}{a} = 1\ \frac{1}{сек};$$

тогда из первого выражения (а) находим

$$w_P = 0{,}5 \cdot 1^2 = 0{,}5\ м/сек^2.$$

По формуле (13) находим, что угол μ между вращательным ускорением какой-либо точки и направлением луча, проведенного от точки к полюсу, будет определяться формулой

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{-1}{1} = -1,$$

откуда $\mu = -\frac{\pi}{4}$. В этом можно также убедиться построением параллелограмма ускорений при точке O, из которого видно, что вращательное ускорение w_{12} этой точки образует с лучом OP именно такой угол μ.

Откладывая полученный угол μ от ускорений w_P и w_0 в том же направлении, то есть по стрелке часов, найдем, что мгновенный центр ускорений будет лежать в точке Q пересечения лучей OQ и PQ. Из чертежа ясно, что он окажется лежащим на линии действия вектора w_{12}, причем $r = OQ = a\cos\frac{\pi}{4} = 0{,}5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}3536\ м$. То же самое можно найти по формуле (19), из которой следует, что

$$r = \frac{w_0}{\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1+1}} = 0{,}5\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}3536\ м.$$

Ускорение точки M найдется по (20), если заметить, что для нее $r = MQ = \frac{1}{2}\,a = 0{,}25\ м$, поэтому

$$w_M = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = 0{,}25 \cdot \sqrt{2} = 0{,}3536\ м/сек^2.$$

Так как точка M на чертеже занимает наинизшее из возможных своих положений, то нормаль к ее траектории совпадает с линией OM, а поэтому ее нормальное ускорение окажется тангенциальным относительно центра Q; в силу этого оно найдется по формуле

$$w_n = w_1 = |\dot{\omega}| \cdot MQ = 1 \cdot 0{,}25 = 0{,}25\ м/сек^2.$$

А так как

$$v_M = \omega \cdot PM = 0{,}25\ м/сек,$$

то радиус кривизны траектории согласно второй формуле (7—6) будет

$$\rho = \frac{v_M^2}{w_n} = \frac{(0{,}25)^2}{0{,}25} = 0{,}25\ м.$$

§ 10. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

1. Определение положения тела. Движением твердого тела вокруг неподвижной точки называется тот случай, когда во все время движения одна точка тела остается неподвижной.

Если за полюс принять неподвижную точку тела, то ее координаты ξ_0, η_0, ζ_0 окажутся постоянными числами; тогда, в соответствии со сказанным в § 8 п. 2, положение твердо-

го тела будет определяться только тремя углами Эйлера. Следовательно, в данном случае тело имеет три степени свободы.

Можно положение тела, как мы видели, определить также положением трех его точек, не лежащих на одной прямой. Беря за одну из таких точек неподвижную точку тела, нам достаточно будет знать положение еще двух точек тела, удовлетворяющих указанному условию.

2. Скорости точек тела. Мгновенная угловая скорость. Возьмем неподвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$ и подвижную $Oxyz$, движущуюся вместе с телом, с общим началом в неподвижной точке тела O. Тогда произвольная точка тела будет иметь один и тот же радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ в обеих системах отсчета. В подвижной системе координаты точки x, y, z будут постоянными числами, а орты координатных осей будут менять со временем свои направления, то есть будут функциями времени. Поэтому дифференцируя выражение радиуса-вектора

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{\kappa},$$

получим для скорости точки выражение

$$\boldsymbol{v} = x\dot{\boldsymbol{i}} + y\dot{\boldsymbol{j}} + z\dot{\boldsymbol{\kappa}}.$$

Для получения проекции скорости точки на ось x умножаем это равенство скалярно на орт $\boldsymbol{i}$:

$$v_x = x\dot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{i} + y\dot{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{i} + z\dot{\boldsymbol{\kappa}}\cdot\boldsymbol{i}. \tag{a}$$

Из равенства $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1$ следует, что

$$\dot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{i} = 0, \tag{b}$$

а из $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0$ находим

$$\dot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{j} + \boldsymbol{i}\dot{\boldsymbol{j}} = 0,$$

откуда

$$\dot{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{i} = -\dot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{j}. \tag{c}$$

Подставляя (b) и (c) в (a), получаем

$$v_x = \dot{\boldsymbol{\kappa}}\cdot\boldsymbol{i}z - \dot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{j}y.$$

Остальные проекции найдутся тогда циклической перестановкой в виде

$$v_y = \dot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{j}x - \dot{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{\kappa}z,$$

$$v_z = \dot{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{\kappa}y - \dot{\boldsymbol{\kappa}}\cdot\boldsymbol{i}x.$$

Введем теперь вектор $\boldsymbol{\omega}$ с проекциями на оси подвижной системы координат

$$p = \dot{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{\kappa},\quad q = \dot{\boldsymbol{\kappa}}\cdot\boldsymbol{i},\quad r = \dot{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{j}. \tag{d}$$

тогда проекции скорости точки на эти оси можно переписать в виде

$$v_x = qz - ry,\ v_y = rx - pz,\ v_z = py - qx, \qquad (1)$$

что в векторной форме дает для скорости точки выражение

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \qquad (2)$$

Таким образом, оказалось, что скорость точки определяется теми же формулами Эйлера, что и в случае вращения тела вокруг неподвижной оси. При этом введенный нами вектор $\boldsymbol{\omega}$ играет роль угловой скорости тела.

Формулы (d) показывают, что проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ являются функциями времени, и поэтому этот вектор, вообще говоря, будет менять со временем не только свою величину, но и свою ориентацию относительно тела (в отличие от вращения вокруг неподвижной оси). Поэтому вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется *мгновенной угловой скоростью* тела, а ось, по которой он располагается в данный момент, — *мгновенной осью вращения* тела.

Уравнения мгновенной оси вращения можно найти как уравнения геометрического места точек, скорости которых в данный момент равны нулю. Полагая в формулах (1) $v_x = v_y = v_z = 0$ и переписывая полученные равенства в виде пропорций, находим для искомого места

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}. \qquad (3)$$

Следовательно, мгновенная ось вращения есть прямая, проходящая через начало координат, то есть через неподвижную точку тела.

Полученный результат говорит о том, что для определения скоростей точек тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в каждый момент времени его можно рассматривать как вращающееся вокруг некоторой мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку. Если эта мгновенная ось вращения будет найдена, то модуль скорости любой точки тела, как и в случае вращения вокруг неподвижной оси, определится по формуле

$$v = \omega\rho, \qquad (4)$$

где ω — модуль мгновенной угловой скорости, а ρ — расстояние точки от мгновенной оси вращения. Вектор скорости $\boldsymbol{v}$ будет направлен в сторону вращения тела по касательной к окружности радиуса ρ, лежащей в плоскости, перпендикулярной мгновенной оси вращения и имеющей центр на этой оси.

Так как в неподвижной системе координат проекциями вектора $\boldsymbol{r}$ являются координаты ξ, η, ζ в этой системе, то,

проектируя (2), найдем для проекций скорости любой точки тела на неподвижные оси выражения:

$$v_\xi = q'\zeta - r'\eta,\ v_\eta = r'\xi - p'\zeta,\ v_\zeta = p'\eta - q'\xi, \qquad (5)$$

где p', q', r' — проекции вектора ω на оси неподвижной системы координат. Уравнения же мгновенной оси вращения в этих осях будут

$$\frac{\xi}{p'} = \frac{\eta}{q'} = \frac{\zeta}{r'}. \qquad (6)$$

Вследствие непрерывности изменения скоростей точек тела положение мгновенной оси вращения будет непрерывно меняться как в пространстве, связанном с неподвижной системой отсчета, так и в пространстве, связанном с движущимся телом. Поэтому мгновенная ось вращения опишет в этих пространствах геометрические места, называемые соответственно *неподвижным* и *подвижным аксоидами*. Так как эти поверхности образуются прямыми, проходящими через неподвижную точку, то они будут конусами с вершиной в этой точке. Мгновенная ось вращения для данного момента времени явится той образующей, по которой в этот момент оба аксоида касаются друг друга.

Точки тела, лежащие на мгновенной оси вращения, не имеют скорости, вращение же тела вокруг этой оси вызывает и вращение подвижного аксоида. Отсюда вытекает, что *движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно представить качением без скольжения подвижного аксоида по неподвижному*.

Уравнения аксоидов найдутся следующим образом. Знаменатели в уравнениях (3) и (6) являются функциями времени. Поэтому, переписав, например, уравнения (3) в форме

$$\frac{y}{x} = \frac{q}{p},\ \frac{z}{x} = \frac{r}{p}$$

и исключая время из этих равенств, придем к уравнению вида

$$f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0,$$

где f — некоторая функция своих аргументов. Это уравнение будет уравнением конуса, являющегося подвижным аксоидом. Таким же путем из уравнений (6) найдем, что уравнение неподвижного аксоида есть

$$F\left(\frac{\eta}{\xi}; \frac{\zeta}{\xi}\right) = 0.$$

Пример. Тело вращается вокруг неподвижной точки O так, что вектор угловой скорости имеет проекции на оси Ox и Oy, связанной

с телом системы координат $p = a$, $q = a \sin nt$, где a и n постоянны, а скорость точки M с координатами 1, 1, 0 имеет проекцию $v_x = -a \cos nt$. Найти угловую скорость, уравнения мгновенной оси вращения, подвижный аксоид, а также скорость точки M.

По первой формуле (1) имеем для точки M:

$$v_x = qz - ry = q \cdot 0 - r \cdot 1 = -r,$$

откуда

$$r = -v_x = a \cos nt.$$

Величина угловой скорости будет

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + a^2 (\sin^2 nt + \cos^2 nt)} = a\sqrt{2}.$$

По (3) уравнения мгновенной оси вращения запишутся в виде

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{a \sin nt} = \frac{z}{a \cos nt},$$

то есть

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{\sin nt} = \frac{z}{\cos nt}.$$

Отсюда

$$\frac{y}{x} = \sin nt, \quad \frac{z}{x} = \cos nt.$$

Исключая t, находим уравнение подвижного аксоида

$$y^2 + z^2 = x^2.$$

Таким образом, аксоидом будет круговой конус, ось которого совпадает с осью Ox и у которого угол раствора при вершине равен $\frac{\pi}{2}$.

По формулам (1) имеем для точки M:

$$v_y = rx - pz = r, \quad v_z = py - qx = p - q.$$

Поэтому проекции скорости точки M будут:

$$v_x = -a \cos nt, \quad v_y = a \cos nt, \quad v_z = a (1 - \sin nt),$$

а величина этой скорости:

$$v = \sqrt{2a^2 \cos^2 nt + a^2 (1 - \sin nt)^2} = a\sqrt{2 - 2 \sin nt + \cos^2 nt} =$$

$$= a\sqrt{4 - (1 + \sin nt)^2}.$$

Размерность полученных величин находится в соответствии с размерностями координат и времени.

3. Ускорение. Локальная производная вектора. Теорема Ривальса. Дифференцируя выражение (2) по времени, найдем для ускорения произвольной точки тела:

$$w = \frac{dv}{dt} = \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r} = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r).$$

Раскрывая двойное векторное произведение, можем это выражение переписать в виде

$$w = \dot{\omega} \times r + \omega(\omega \cdot r) - \omega^2 r. \qquad (7)$$

Отсюда находим проекции ускорения точки тела на неподвижные оси координат:

$$\left.\begin{aligned} w_\xi &= \dot{q}'\zeta - \dot{r}'\eta + p'(p'\xi + q'\eta + r'\zeta) - \omega^2\xi, \\ w_\eta &= \dot{r}'\xi - \dot{p}'\zeta + q'(p'\xi + q'\eta + r'\zeta) - \omega^2\eta, \\ w_\zeta &= \dot{p}'\eta - \dot{q}'\xi + r'(p'\xi + q'\eta + r'\zeta) - \omega^2\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Для проектирования выражения (7) на оси подвижной системы координат необходимо знать, как выразятся проекции на эти оси углового ускорения $\boldsymbol{\omega}$, то есть производной от вектора угловой скорости. С этой целью найдем выражение для производной по времени от любого вектора $\boldsymbol{a}$, рассматриваемого в подвижной системе координат. Дифференцируя общее выражение этого вектора

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{\kappa},$$

мы должны учесть, что орты осей подвижной системы теперь будут векторами, переменными по направлению. Поэтому

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \dot{a}_x\boldsymbol{i} + \dot{a}_y\boldsymbol{j} + \dot{a}_z\boldsymbol{\kappa} + a_x\dot{\boldsymbol{i}} + a_y\dot{\boldsymbol{j}} + a_z\dot{\boldsymbol{\kappa}}.$$

Так как орты осей только вращаются, то их производные будут равны чисто вращательным скоростям их концов, так что

$$\dot{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}, \quad \dot{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}, \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы. Подставляя в предыдущее выражение и вынося общий вектор $\boldsymbol{\omega}$, находим

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \dot{a}_x\boldsymbol{i} + \dot{a}_y\boldsymbol{j} + \dot{a}_z\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\omega} \times (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{\kappa}).$$

Вектор

$$\tilde{\dot{\boldsymbol{a}}} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{a}}{dt} = \dot{a}_x\boldsymbol{i} + \dot{a}_y\boldsymbol{j} + \dot{a}_z\boldsymbol{\kappa} \qquad (9)$$

называется *локальной* или *относительной* производной вектора $\boldsymbol{a}$. Как видим, эта производная составляется так, как если бы оси системы $Oxyz$ были неподвижны: ее проекции на эти оси равные производным от проекций вектора $\boldsymbol{a}$. Таким образом, для производной вектора получим окончательно

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \tilde{\dot{\boldsymbol{a}}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}. \qquad (10)$$

Применяя эту формулу к угловому ускорению и учитывая, что $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, находим $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\dot{\boldsymbol{\omega}}}$, то есть, что производная от угловой скорости совпадает с ее локальной произ-

водной; поэтому ее проекции определяются формулой (9) и имеют вид:

$$(\dot{\boldsymbol{\omega}})_x = \dot{p},\ (\dot{\boldsymbol{\omega}})_y = \dot{q},\ (\dot{\boldsymbol{\omega}})_z = \dot{r}.$$

Из сказанного вытекает, что проекции ускорения какой-либо точки тела на оси подвижной системы координат будут получаться в виде, аналогичном (8), то есть:

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \dot{q}z - \dot{r}y + p(px + qy + rz) - \omega^2 x, \\ w_y &= \dot{r}x - \dot{p}z + q(px + qy + rz) - \omega^2 y, \\ w_z &= \dot{p}y - \dot{q}x + r(px + qy + rz) - \omega^2 z. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

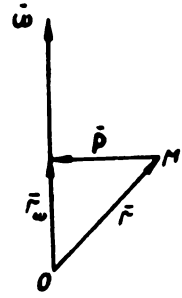
Мгновенная ось вращения непрерывно меняет свое направление; поэтому вектор $\boldsymbol{\omega}$ меняет не только величину, но и направление. Это означает, что вектор углового ускорения $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, в отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, не будет лежать на мгновенной оси вращения и будет иметь свою линию действия. Тем не менее, формулу (7) для ускорения можно представить в виде, аналогичном выражению ускорения для случая вращения тела вокруг неподвижной оси.

С этой целью введем орт мгновенной оси вращения $\boldsymbol{\omega}^\circ$ так, что $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{\omega}^\circ$. Тогда

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r} = \omega^2\boldsymbol{\omega}^\circ(\boldsymbol{\omega}^\circ\cdot\boldsymbol{r}) = \omega^2 r_\omega \boldsymbol{\omega}^\circ,$$

где $r_\omega = \boldsymbol{\omega}^\circ\cdot\boldsymbol{r}$ — проекция радиуса-вектора точки на мгновенную ось вращения. Но вектор $r_\omega\boldsymbol{\omega}^\circ = \boldsymbol{r}_\omega$, как видно из чертежа (фиг. 32), равен геометрической сумме векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p}$ — вектор, направленный к оси вращения, перпендикулярный к ней и равный по величине расстоянию точки до этой оси. Таким образом, имеем

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}) = \omega^2\boldsymbol{r}_\omega = \omega^2(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{p}).$$



Фиг. 32.

Подстановка в (7) дает

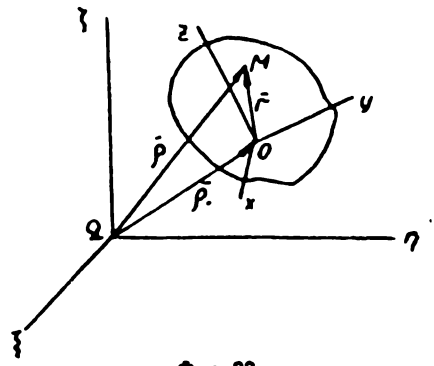
$$\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} + \omega^2\boldsymbol{p}. \qquad (12)$$

Этот результат известен как *теорема Ривальса*. Заметим, что слагаемые в (12) имеют следующий смысл: первый член $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$ является „тангенциальным“ ускорением точки по отношению к оси мгновенного ускорения, второй же $\omega^2\boldsymbol{p}$ — нормальным осестремительным по отношению к мгновенной оси вращения.

§ 11. Общий случай движения свободного твердого тела

1. Скорости точек свободного твердого тела. Возьмем неподвижную систему координат $\Omega\xi\eta\zeta$ и подвижную $Oxyz$, связанную с телом и имеющую начало в некоторой точке тела O, которую, как и ранее, будем называть полюсом (фиг. 33). Радиусы-векторы произвольной точки тела M и полюса в неподвижной системе отсчета обозначим соответственно через ρ и ρ_0, а радиус-вектор точки M в подвижной системе — через r. Тогда

$$\rho = \rho_0 + r. \qquad \text{(a)}$$



Фиг. 33.

Дифференцируя это выражение по времени, находим для скорости точки

$$v = v_0 + \dot{r}.$$

По предыдущему производная $\dot{r}$ найдется как скорость от вращения тела вокруг полюса O в виде

$$\dot{r} = \omega \times r,$$

где ω — есть мгновенная угловая скорость тела в его вращательном движении вокруг полюса; тот же результат можно получить из выражения (10 — 10) полной производной вектора, в котором локальную производную $\tilde{\dot{r}}$ нужно положить равной нулю, ибо вектор r остается неизменным в связанном с телом пространстве. Таким образом, для скорости точки будем иметь

$$v = v_0 + \omega \times r. \qquad (1)$$

Проектируя эту формулу на оси подвижной системы координат $Oxyz$, получим:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{ox} + qz - ry, \\ v_y &= v_{oy} + rx - pz, \\ v_z &= v_{oz} + py - qx. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Перепишем согласно (а) формулу (1) в виде

$$v = v_0 + \omega \times (\rho - \rho_0).$$

Отсюда проекции скорости точки тела на оси неподвижной системы отсчета окажутся равными:

$$\left.\begin{aligned} v_\xi &= \dot\xi = \dot\xi_0 + q'(\zeta - \zeta_0) - r'(\eta - \eta_0), \\ v_\eta &= \dot\eta = \dot\eta_0 + r'(\xi - \xi_0) - p'(\zeta - \zeta_0), \\ v_\zeta &= \dot\zeta = \dot\zeta_0 + p'(\eta - \eta_0) - q'(\xi - \xi_0). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Как и ранее, в формулах (2) p, q, r — проекции вектора угловой скорости на оси подвижной системы, а p', q', r' в (3) — проекции того же вектора на оси неподвижной системы координат.

Формула (1) показывает, что движение свободного твердого тела можно рассматривать как состоящее из поступательного движения со скоростью $\boldsymbol{v}_0$ вместе с полюсом O и вращательного вокруг полюса с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Тем самым мы пришли к тому же результату, что и для плоско-параллельного движения тела. Повторяя те же рассуждения, что и в § 9, п. 2, найдем, что поступательное движение будет зависеть от выбора полюса, а вращательное нет, так что вектор $\boldsymbol{\omega}$ для данного движения будет свободным вектором.

2. Ускорения точек свободного твердого тела. Ускорение произвольной точки тела найдется дифференцированием по t формулы (1) для скорости

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

При этом производная от поступательной скорости $\boldsymbol{v}_0$ даст поступательное ускорение тела $\boldsymbol{w}_0 = \dot{\boldsymbol{v}}_0 = \ddot{\boldsymbol{\rho}}_0$, равное ускорению полюса, а производная от вращательной скорости $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ даст то же выражение (10—7), что и при вращении тела вокруг неподвижной точки. Таким образом, получим

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}) - \omega^2 \boldsymbol{r}. \qquad (4)$$

Отсюда проекции ускорения на оси подвижной системы координат найдутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} w_x &= w_{ox} + \dot q z - \dot r y + p(px + qy + rz) - \omega^2 x, \\ w_y &= w_{oy} + \dot r x - \dot p z + q(px + qy + rz) - \omega^2 y, \\ w_z &= w_{oz} + \dot p y - \dot q x + r(px + qy + rz) - \omega^2 z. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Для проектирования (4) на неподвижные координатные оси заменяем $\boldsymbol{w}_0$ на $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_0$ и полагаем $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0$, где $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\rho}_0$ по-прежнему будут радиусами-векторами произвольной точки и полюса соответственно. Тогда получим следующие выражения для проекции ускорения на неподвижные оси координат:

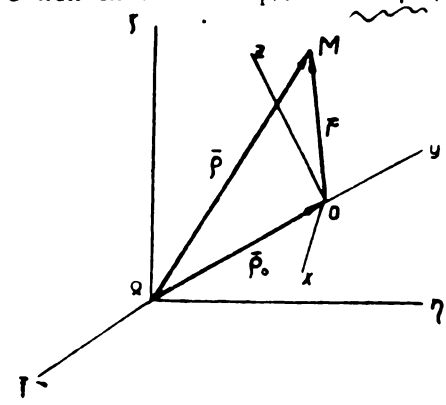
$$
\left.
\begin{aligned}
w &= \ddot{\xi}_0 + \dot{q}'(\zeta - \dot{\zeta}_0) - \dot{r}'(\eta_1 - \eta_{10}) + \\
&+ p'\{p'(\xi - \xi_0) + q'(\eta - \eta_{10}) + r'(\zeta - \zeta_0)\} - \omega^2(\xi - \xi_0), \\
w_\eta &= \ddot{\eta}_{10} + \dot{r}'(\xi - \xi_0) - \dot{p}'(\zeta - \zeta_0) + \\
&+ q'\{p'(\xi - \xi_0) + q'(\eta_1 - \eta_{10}) + r'(\zeta - \zeta_0)\} - \omega^2(\eta_1 - \eta_{10}), \\
w_\zeta &= \ddot{\zeta}_0 + \dot{p}'(\eta_1 - \eta_{10}) - \dot{q}'(\xi - \xi_0) + \\
&+ r'\{p'(\xi - \xi_0) + q'(\eta_1 - \eta_{10}) + r'(\zeta - \zeta_0)\} - \omega^2(\zeta - \zeta_0).
\end{aligned}
\right\} \quad (6)
$$

Глава 3

КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 12. Сложное движение точки

1. Относительное, переносное и абсолютное движения точки. Теорема о сложении скоростей. Пусть точка M движется относительно некоторой неизменяемой среды S, которая в свою очередь движется относительно другой тоже неизменяемой среды Σ. Будем рассматривать среду Σ как неподвижную; тогда связанная с ней система координат $\Omega\xi\eta\zeta$ (фиг. 34) может быть названа *неподвижной* системой отсчета. Со средой S свяжем систему координат $Oxyz$, которую будем называть *подвижной* системой отсчета. Тогда движение точки M относительно системы $Oxyz$ или среды S называется *относительным*, а относительно системы $\Omega\xi\eta\zeta$ или среды Σ — *абсолютным*. Движение же среды S в среде Σ или движение точки M вместе со средой S называется *переносным*.



Фиг. 34.

Мы могли бы, наоборот, считать неподвижной среду S, тогда переносным явится движение среды Σ относительно S, относительным окажется движение точки M в среде Σ, а абсолютным — в среде S. Таким образом, мы по нашему произволу можем считать одно движение относительным а другое абсолютным. В дальнейшем, для определенности, подвижной будем считать среду S и связанную с ней систему отсчета $Oxyz$.

Положение точки M будем определять в неподвижной системе отсчета радиусом-вектором ρ, а в подвижной — радиусом-вектором r. Тогда, как видно из чертежа,

$$\rho = \rho_0 + r,$$

где ρ_0 — радиус-вектор полюса O (начала подвижной системы). Назовем скорость точки M относительно неподвижной среды Σ *полной* или *абсолютной*.

Дифференцируя предыдущее равенство, находим для этой скорости

$$v = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_0}{dt} + \frac{dr}{dt}.$$

Так как радиус-вектор r определен в подвижной системе отсчета, то согласно (10 — 10)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\tilde{dr}}{dt} + \omega \times r,$$

а

$$\frac{d\rho_0}{dt} = v_0$$

— скорость полюса O. Поэтому

$$v = v_0 + \omega \times r + \frac{\tilde{dr}}{dt}.$$

Как мы знаем, согласно (11 — 1) выражение

$$v_e = v_0 + \omega \times r \qquad (1)$$

представляет собой скорость той точки подвижной среды S, в которой находится движущаяся точка M, так что это есть та составляющая скорости точки M, которая возникает вследствие движения среды S. Поэтому эта составляющая называется *переносной* скоростью точки M.

По определению локальной производной выражение

$$v_r = \frac{\tilde{dr}}{dt} \qquad (2)$$

является той составляющей скорости точки M, при определении которой подвижная система отсчета рассматривается как неподвижная в данный момент, так что это есть скорость точки M по отношению к подвижной среде S. Поэтому эта составляющая называется *относительной* скоростью точки M. Проекции относительной скорости на оси подвижной системы $Oxyz$ по свойству локальной производ-

ной равны производным x, y и z от координат точки в этой системе.

В итоге имеем

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r. \tag{3}$$

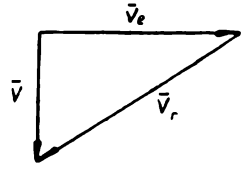
Получили следующую *теорему сложения скоростей: при сложном движении точки ее полная или абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.*

Эту теорему можно получить и другим более наглядным путем. В самом деле, пусть вследствие движения подвижной среды точка M за промежуток времени Δt испытывает перемещение $\Delta\rho_e$, а вследствие своего движения относительно этой среды — перемещение $\Delta\tilde{\boldsymbol{r}}$. Тогда относительно неподвижной среды Σ она испытывает перемещение

$$\Delta\rho = \Delta\rho_e + \Delta\tilde{\boldsymbol{r}}.$$

Деля это равенство на Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим ту же формулу (3).

Полученная теорема позволяет объяснить хорошо известные факты нашей обыденной жизни. Так, если человек идет под отвесно падающим дождем, то, принимая человека за подвижную среду и строя треугольник скоростей по формуле (3) для дождевой капли (фиг. 35), видим, что относительная скорость капли оказывается наклоненной навстречу движению человека. Точно так же из той же схемы видно, что, желая переплыть реку поперек ее течения, мы должны направить лодку косо вверх по течению.



Фиг. 35.

Теорема сложения скоростей может быть обобщена на любое число подвижных сред, движущихся последовательно относительно друг друга. Так, если точка движется относительно среды S_1, среда S_1 — относительно S_2, S_2 — относительно S_3 и т. д. — вплоть до среды S_{n-1}, движущейся относительно среды S_n, принимаемой за неподвижную, то абсолютная скорость точки окажется геометрической суммой относительной скорости v_1 относительно среды S_1 и всех последовательных переносных скоростей $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, то есть

$$\boldsymbol{v} = \sum_{n=1}^{n} \boldsymbol{v}_i. \tag{4}$$

2. Ускорение точки в сложном движении. Теорема Кориолиса. Дифференцируя по времени выражение абсолютной скорости

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_r,$$

найдем для абсолютного ускорения:

$$\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{v}}_r.$$

Применяя опять формулу (10—10) к производным от векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}_r$, получим

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\tilde{\dot{\boldsymbol{r}}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \tilde{\dot{\boldsymbol{v}}}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r.$$

Учитывая (2), можем это выражение переписать в виде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \tilde{\dot{\boldsymbol{v}}}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r. \qquad (5)$$

Если бы точка M не имела относительного движения, то было бы $\boldsymbol{v}_r = 0$, и ускорение точки равнялось бы

$$\boldsymbol{w}_e = \boldsymbol{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}), \qquad (6)$$

что совпадает с выражением (11—4) для ускорения точки среды S. Это ускорение является *переносным* в соответствии с понятием о переносном движении. Таким образом, аналогично скорости, переносным ускорением называется ускорение той точки подвижной среды, в которой в данный момент находится движущаяся точка M.

Член

$$\boldsymbol{w}_r = \tilde{\dot{\boldsymbol{v}}}_r = \tilde{\ddot{\boldsymbol{r}}} \qquad (7)$$

в (5) представляет собой ускорение точки M в ее относительном движении в среде S; поэтому эта часть ускорения называется *относительным* ускорением точки M. Его проекции на оси, связанной со средой S подвижной системы координат $Oxyz$, равны первым производным по времени от проекций скорости или вторым производным $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$ от координат точки в этой системе.

Видим, что в отличие от выражения для абсолютной скорости в формулу (5) входит еще дополнительный член

$$\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r. \qquad (8)$$

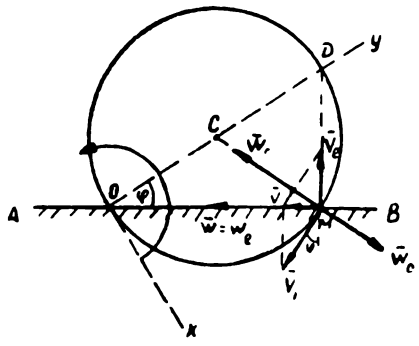
Это ускорение носит название *добавочного, поворотного* или *ускорения Кориолиса*. Так как $\boldsymbol{\omega}$ есть вектор угловой скорости вращения подвижной среды, то ускорение Кориолиса есть совместный эффект вращательного движения подвижной среды и относительного движения точки; оно будет исчезать всякий раз, когда будет отсутствовать один из этих двух факторов.

Таким образом, равенство (5) может быть переписано в виде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_c, \qquad (9)$$

что составляет содержание теоремы Кориолиса: *абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и поворотного ускорений*. При этом составляющие ускорения определяются выражениями (6), (7) и (8).

Пример. Окружность радиуса a вращается в своей плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг точки O неподвижной прямой AB (фиг. 36). Найти в зависимости от $r = OM$ скорости и ускорения точки пересечения M окружности с прямой AB в ее движении: 1) по окружности, 2) по прямой AB.



Фиг. 36.

Так как прямая AB неподвижна, то движение точки M по этой прямой является ее абсолютным движением, а движение по вращающейся окружности—относительным.

При направлении вращения, указанном стрелкой, точка M будет иметь относительную скорость v_r, направленную по касательной к окружности вниз. Так как

$$r = OM = 2a\cos\varphi,$$

то координаты точки M в связанной с окружностью системе координат Oxy будут

$$x = r\sin\varphi = 2a\sin\varphi\cos\varphi,\quad y = r\cos\varphi = 2a\cos^2\varphi.$$

Отсюда находим проекции относительной скорости:

$$\dot{x} = 2a\cos 2\varphi\cdot\omega,\quad \dot{y} = -2a\sin 2\varphi\cdot\omega.$$

Следовательно, величина относительной скорости будет

$$v_r = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 2a\omega.$$

Вследствие постоянства полученной скорости v_r относительное ускорение w_r будет чисто нормальным, направленным к центру окружности, и найдется в виде

$$w_r = \frac{v_r^2}{a} = 4a\omega^2.$$

Таким образом, элементы движения точки по окружности найдены, и они оказались постоянными, не зависящими от r.

Переносная скорость v_e найдется как скорость точки среды, вращающейся вместе с окружностью вокруг точки O. Поэтому эта скорость будет направлена по перпендикуляру к OM в сторону вращения и будет иметь величину

$$v_e = r\omega = 2a\omega\cos\varphi.$$

Проекция же относительной скорости на то же направление есть

$$-v_r\cos\varphi = -2a\omega\cos\varphi.$$

Следовательно, при проектировании абсолютной скорости

$$v = v_r + v_e$$

на это направление получим нуль, и скорость v окажется направленной по прямой AB к точке O, имея величину

$$v = v_r \sin\varphi = 2a\omega \sqrt{1 - \frac{r^2}{4a^2}} = \omega \sqrt{4a^2 - r^2}. \qquad (a)$$

Ускорение Кориолиса w_c согласно формуле

$$w_c = 2\omega \times v_r$$

окажется направленным от центра окружности по ее радиусу и будет иметь величину

$$w_c = 2\omega v_r = 4a\omega^2,$$

то есть такую, как и ускорение w_r. Поэтому при сложении векторы w_r и w_c взаимно уничтожаются, и полное ускорение будет $w = w_e$ с модулем

$$w = w_e = r\omega^2, \qquad (b)$$

ибо точка M среды равномерно вращается вокруг точки O. Это ускорение как чисто центростремительное будет направлено к точке O.

Выражения (a) и (b) и дают скорость и ускорение точки M в ее движении вдоль прямой AB.

§ 13. Основные сведения по теории скользящих векторов

1. Три типа векторов. Как известно, существует три основных типа векторов — *свободные, скользящие* и *приложенные*.

Свободным вектором называется вектор, определяемый только величиной и направлением, не связанный никаким условием относительно своей точки приложения, так что его можно считать приложенным в любой точке пространства.

Модуль всякого свободного вектора a и его направление полностью определяются его проекциями на оси декартовых координат a_x, a_y, a_z, часто называемыми координатами вектора. Таким образом, свободный вектор определяется *тремя* независимыми скалярными величинами.

Скользящим вектором называется вектор, определяемый, помимо величины и направления, также еще и своей линией действия и его можно считать приложенным в любой точке этой линии. Поэтому эквивалентными скользящими векторами будут два одинаково направленных равных по модулю вектора, лежащих на одной прямой.

Из определения момента вектора относительно точки (§ 6, п. 4) вытекает, что момент скользящего вектора относительно произвольного центра остается неизменным при перемещении точки приложения вектора вдоль линии его действия. Поэтому выражение (6—17) момента вектора

$$m = r \times a \qquad (1)$$

можно рассматривать как векторное уравнение линии действия скользящего вектора, в котором векторы a и m по-

стоянны, и центр момента принят за начало координат. Следовательно, линия действия скользящего вектора найдется, если только будет известен момент вектора относительно начала координат. Это означает, что скользящий вектор можно определить тремя проекциями a_x, a_y, a_z и тремя моментами m_x, m_y, m_z относительно координатных осей. Так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{m}$ взаимно ортогональны, то эти шесть величин будут связаны условием

$$a_x m_x + a_y m_y + a_z m_z = 0. \qquad (2)$$

Поэтому скользящий вектор определяется *пятью* независимыми скалярными величинами.

Так как для определения скользящего вектора нужно знать только проекции векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{m}$, то можно сказать, что скользящий вектор $\boldsymbol{a}$ определяется двумя свободными векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{m}$, связанными условием (2).

Приложенным вектором называется вектор, характеризуемый величиной, направлением и определенной точкой приложения. Поэтому этот вектор определяется шестью независимыми скалярными величинами: тремя своими проекциями и тремя координатами точки приложения.

Независимо от характера векторов, два вектора называются *равными* друг другу, если они имеют равные модули и действуют по параллельным прямым в одну и ту же сторону. Для этого определения существенно, что положение точек приложения векторов не играет никакой роли.

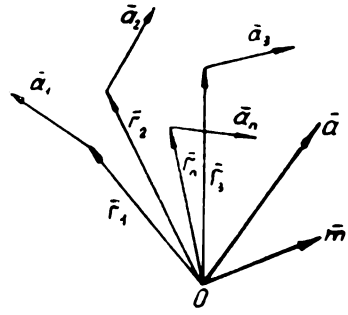
Два вектора, лежащие на параллельных прямых и направленные в противоположные стороны и равные по модулю, называются *противоположными*; если же они, кроме того, действуют по одной прямой, то — *прямо противоположными*.

Как будет показано в дальнейшем, любое движение твердого тела может быть представлено как полученное в результате вращений вокруг некоторых осей, причем векторы угловых скоростей, как и в случаях вращения тела вокруг неподвижной оси или точки, будут скользящими векторами. Далее в статике мы увидим, что вектор силы, приложенный к абсолютно твердому телу, также является скользящим вектором. Естественно поэтому рассмотреть некоторые общие сведения о скользящих векторах, одинаково применимые как в кинематике, так и в статике.

2. Система скользящих векторов. Совокупность любого числа всяких векторов, объединенных каким-либо признаком, называется системой векторов. Так, совокупность векторов угловых скоростей всех вращений, в которых участвует данное твердое тело, образует систему скользящих векторов.

Из сделанного определения вытекает, что векторы системы имеют одну и ту же размерность, так что над ними можно производить операции сложения и вычитания.

Пусть мы имеем систему n скользящих векторов $\boldsymbol{a}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) (фиг. 37). Как мы установили, каждый вектор этой системы определяется двумя свободными векторами $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_i$, где $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор точки приложения скользящего вектора относительно произвольно выбранного центра O. При этом за точку приложения каждого скользящего вектора можно взять любую точку его линии действия. Следовательно, система скользящих векторов определяется двумя системами свободных векторов.



Фиг. 37.

Геометрическая сумма всех векторов какой-либо системы свободных векторов называется главным вектором системы. Она является важнейшей характеристикой такой системы. Поэтому система скользящих векторов характеризуется двумя главными векторами указанных выше систем свободных векторов. При этом вектор

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \tag{3}$$

и для системы скользящих векторов тоже называется *главным вектором* системы, а вектор

$$\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_i \tag{4}$$

называется *главным моментом* системы относительно центра O.

Процесс составления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{m}$ называется *приведением системы скользящих векторов к центру O*, а сами главный вектор и главный момент — *элементами приведения*. Хотя векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{m}$ отнюдь не являются приложенными векторами, принято условно изображать их связанными с центром приведения O, как это указано на фиг. 37.

Беря оси координат с началом в центре O, получим для проекций главного вектора и главного момента:

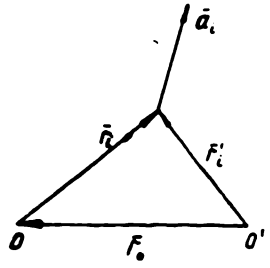
$$a_x = \sum_{i=1}^{n} a_{ix}, \quad a_y = \sum_{i=1}^{n} a_{iy}, \quad a_z = \sum_{i=1}^{n} a_{iz}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \sum_{i=1}^{n} m_{ix} = \sum_{i=1}^{n} (y_i a_{iz} - z_i a_{iy}), \\ m_y &= \sum_{i=1}^{n} m_{iy} = \sum_{i=1}^{n} (z_i a_{ix} - x_i a_{iz}), \\ m_z &= \sum_{i=1}^{n} m_{iz} = \sum_{i=1}^{n} (x_i a_{iy} - y_i a_{ix}). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Выражения (6) называются также главными моментами системы относительно координатных осей.

3. Зависимость элементов приведения от выбора центра приведения и инварианты приведения. Посмотрим, что произойдет с элементами приведения, если от центра O перейти к новому центру приведения O'.

Так как согласно (3) главный вектор получается как замыкающая ломаной, последовательными сторонами которой являются векторы системы, и это построение не связано ни с каким определенным центром, то главный вектор системы останется тем же самым.



Фиг. 38.

Иначе обстоит дело с главным моментом, что связано с изменением моментов отдельных векторов при перемене центра приведения. Пусть $\boldsymbol{r}_i'$ есть радиус-вектор точки приложения вектора $\boldsymbol{a}_i$ относительно центра O' (фиг. 38). Тогда главный момент системы относительно этого центра будет

$$\boldsymbol{m}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{a}_i.$$

Из чертежа видим, что

$$\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_i,$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор старого центра приведения O относительно нового O'. Подставляя в предыдущее выражение, имеем

$$\boldsymbol{m}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{a}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_i$$

или

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{r}_0 \times \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_i.$$

Сумма в первом члене есть главный вектор $\boldsymbol{a}$ системы, а второй член равен главному моменту $\boldsymbol{m}$ относительно центра O. Таким образом, имеем

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{a}, \tag{7}$$

то есть *главный момент системы скользящих векторов относительно нового центра приведения равен главному моменту относительно старого центра, сложенному с моментом главного вектора, приложенного в старом центре, относительно нового.*

Главный вектор, как не изменяющийся при перемене центра приведения, называется *инвариантом приведения.*

Как видно из (7), главный момент при перемене центра приведения изменяется. Однако произвольная система скользящих векторов имеет еще и второй инвариант. Для его получения достаточно умножить выражение (7) скалярно на главный вектор $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{m}' \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a}.$$

Второй член правой части равен нулю как смешанное произведение векторов, содержащее два одинаковых вектора. Следовательно,

$$\boldsymbol{m}' \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{a}.$$

Таким образом, скалярное произведение главного момента на главный вектор является инвариантом приведения.

Второй инвариант может быть представлен иначе. А именно: расписывая каждое скалярное произведение и сокращая модуль главного вектора, находим, что выражение

$$m^* = m' \cos(\boldsymbol{m}', \boldsymbol{a}) = m \cos(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{a}) \tag{8}$$

является инвариантом приведения. Это означает, что в качестве второго инварианта можно рассматривать проекцию m^* главного момента на главный вектор.

4. Приведение к винту. В общем случае при приведении к произвольному центру главный момент будет составлять с главным вектором некоторый угол. Представим главный момент в виде суммы двух составляющих

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}^* + \boldsymbol{m}_1, \tag{9}$$

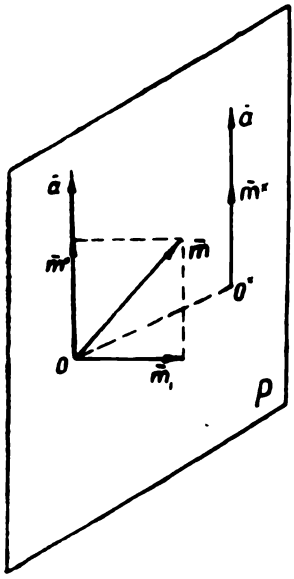
из которых вектор $\boldsymbol{m}^*$ направим по главному вектору $\boldsymbol{a}$, а вектор $\boldsymbol{m}_1$ — перпендикулярно к нему (фиг. 39). Скалярная величина вектора $\boldsymbol{m}^*$ будет определяться формулой (8), то есть будет инвариантом. Поэтому при перемене центра приведения вектор $\boldsymbol{m}^*$ будет оставаться неизменным, и изменение главного момента будет происходить только за счет изменения составляющей $\boldsymbol{m}_1$.

Посмотрим, нельзя ли выбрать такой центр приведения, чтобы составляющая $\boldsymbol{m}_1$ обратилась в нуль. Оказывается,

это возможно сделать. Чтобы это показать, проведем через точку O плоскость P, перпендикулярную моменту $\boldsymbol{m}_1$, и в этой плоскости отложим отрезок

$$OO^* = \frac{m_1}{a}, \qquad \text{(a)}$$

перпендикулярный к $\boldsymbol{a}$, в такую сторону, что, смотря из точки O^* на плоскость векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m})$, мы видели бы кратчайший поворот от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{m}$ происходящим против движения часовой стрелки.



Фиг. 39.

Тогда согласно (7) главный момент системы относительно центра O^* будет

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m} + \overline{O^*O} \times \boldsymbol{a}. \qquad \text{(b)}$$

Но по (a) имеем, что

$$|\overline{O^*O} \times \boldsymbol{a}| = O^*O \cdot a = m_1.$$

По правилу же определения направления векторного произведения находим, что вектор $\boldsymbol{O^*O} \times \boldsymbol{a}$ будет противоположен вектору $\boldsymbol{m}_1$.

Следовательно,

$$\overline{O^*O} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{m}_1.$$

Подставляя это выражение, а также выражение (9) в (b), получаем

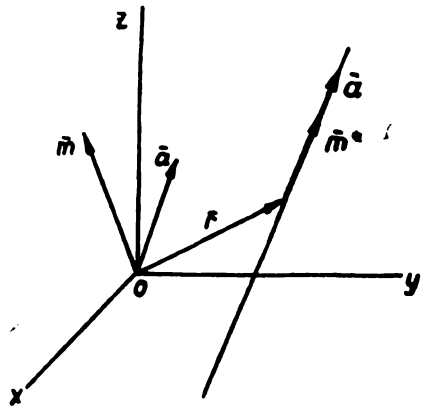
$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m}^*.$$

Таким образом, точка O^*, как центр приведения, будет обладать требуемым свойством.

Перенося главный вектор $\boldsymbol{a}$, как инвариантный, в точку O^*, видим, что для этого центра приведения как главный вектор, так и главный момент будут направлены по одной прямой. Подобное расположение элементов приведения называется *винтом*.

Если от центра O^* перейти к другому центру приведения, лежащему на той же прямой, то в формуле (7) векторы $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{a}$ окажутся коллинеарными, так что $\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{a} = 0$ и $\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m}^*$. Поэтому установленным свойством будут обладать все точки рассматриваемой прямой (проходящей через O^* и параллельной главному вектору для любого центра приведения). Эта прямая называется *осью винта* или *центральной осью* системы скользящих векторов.

Из выражения (9) вытекает, что для точек центральной оси главный момент $\boldsymbol{m}$ будет минимальным. Кроме того, формула (7) показывает, что момент $\boldsymbol{m}_1$ представляет собой момент главного вектора, расположенного на центральной оси, относительно рассматриваемого центра приведения. Так как при удалении от центральной оси плечо главного вектора будет возрастать, то будет расти и момент $\boldsymbol{m}_1$. Следовательно, при таком удалении главный момент $\boldsymbol{m}$ будет непрерывно возрастать по модулю и в то же время за счет роста момента $\boldsymbol{m}_1$ непрерывно отклоняться от главного вектора.



Фиг. 40.

Считая главный вектор $\boldsymbol{a}$ и главный момент $\boldsymbol{m}$ известными для данного произвольного центра O (фиг. 40), найдем уравнения центральной оси в системе декартовых координат с началом в O. Точки центральной оси отличаются от всех других точек пространства тем, что для них

$$\boldsymbol{m}^* = p\,\boldsymbol{a},$$

p есть некоторый скалярный линейный коэффициент пропорциональности, играющий роль параметра винта. Согласно (7) имеем

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}^* + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор любой точки центральной оси. Поэтому предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$\boldsymbol{m} - (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) = p\,\boldsymbol{a},$$

что можно рассматривать как векторное уравнение центральной оси. Проектируя это уравнение на оси координат и разрешая полученные равенства относительно p, придем к уравнениям:

$$\frac{m_x - (ya_z - za_y)}{a_x} = \frac{m_y - (za_x - xa_z)}{a_y} =$$

$$= \frac{m_z - (xa_y - ya_x)}{a_z}. \qquad (10)$$

Это будут уравнения центральной оси, в которых x, y, z являются текущими координатами точек оси.

Найдем еще удобное выражение для скалярной величины момента $\boldsymbol{m}^*$. Используя (8), можем записать, что

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a} = ma\cos(\boldsymbol{m},\boldsymbol{a}) = m^* a,$$

откуда

$$m^* = \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a}}{a}.$$

Выражая скалярное произведение через проекции векторов на оси координат, находим

$$m^* = \frac{m_x a_x + m_y a_y + m_z a_z}{a}. \qquad (11)$$

Так как $\boldsymbol{m}^*$ есть проекция момента $\boldsymbol{m}$ на направление главного вектора, то при $m^* > 0$ элементы винта $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{m}^*$ будут направлены в одну сторону, а при $m^* < 0$ — в противоположные. В первом случае параметр винта

$$\tilde{p} = \frac{m^*}{a}$$

будет положителен, во втором — отрицателен.

5. Эквивалентные системы скользящих векторов. *Две системы скользящих векторов называются эквивалентными друг другу, если они имеют одинаковые главные векторы и главные моменты относительно любого центра приведения.* Для этого в силу инвариантности $\boldsymbol{a}$ и формулы (7) необходимо и достаточно, чтобы главные векторы и главные моменты обеих систем оказались соответственно равными хотя бы для одного центра приведения.

Фиг. 41.

Если главный вектор и главный момент системы скользящих векторов относительно какого-либо центра равны нулю, то такая система называется *эквивалентной нулю*. Такой системой является, например, система двух прямо противоположных скользящих векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ (фиг. 41). В самом деле, при геометрическом сложении таких векторов получаем для главного вектора нуль. С другой же стороны, из равенства модулей векторов и одинаковости их плеч относительно любого центра следует, что численные значения их моментов одинаковы; а так как векторы направлены в противоположные стороны, то их моменты тоже будут противоположны друг другу, и главный момент окажется равным нулю.

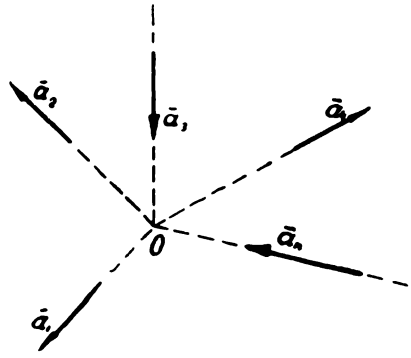
Система скользящих векторов, составленная из нескольких систем, имеет главный вектор и главный момент, равные соответственно суммам главных векторов и главных моментов этих систем относительно того же центра. Отсюда следует, что присоединение к данной системе или отбрасывание от нее системы, эквивалентной нулю, дает систему, эквивалентную прежней.

Две системы скользящих векторов с противоположными главными векторами и главными моментами относительно какого-либо центра называются *прямо противоположными* друг другу. Например, если все векторы данной системы заменить на прямо противоположные, то получим систему, прямо противоположную прежней.

Если какую-либо эквивалентную нулю систему разбить на две, то получим две прямо противоположные системы. Наоборот, соединяя вместе две прямо противоположные системы, придем к системе, эквивалентной нулю

Если система скользящих векторов эквивалентна *одному* скользящему вектору, то этот вектор называется *равнодействующей* данной системы.

Например, для системы *сходящихся* скользящих векторов, то есть векторов, линии действия которых пересекаются в одной точке O (фиг. 42), главный вектор, приложенный в этой точке, явится равнодействующей. В самом деле момент этого вектора и главный момент системы относительно точки O равны нулю, а их главные векторы одинаковы, что и говорит об эквивалентности системы рассматриваемому главному вектору. Так как те же требования будут выполняться для всех точек линии действия равнодействующей, то ее можно переносить в любое место вдоль этой линии, то есть она будет скользящим вектором.



Фиг. 42.

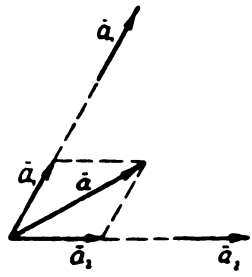
В частности, два скользящих вектора $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ с пересекающимися линиями действия можно перенести в точку пересечения; тогда вектор $\boldsymbol{a}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах и приложенный в этой же точке, будет равнодействующей данных векторов (фиг. 43). Этот результат известен под названием закона параллелограмма.

В основе действий над скользящими векторами лежит

следующая аксиома: *всякую систему скользящих векторов можно заменить любой эквивалентной ей системой.* Эта аксиома позволяет данную систему скользящих векторов заменить простейшей или более удобной в каком-либо отношении.

Замену системы скользящих векторов эквивалентной ей простейшей системой часто называют сложением векторов системы, а замену простейшей системы более сложной — разложением векторов системы.

Системе векторов отвечает некоторое состояние того объекта, к которому она приложена. Поэтому с физической точки зрения смысл сформулированной аксиомы состоит в том, что при замене системы скользящих векторов эквивалентной системой состояние данного объекта останется тем же самым.



Фиг. 43.

6. Система двух скользящих векторов с параллельными линиями действия. Перейдем сначала к рассмотрению некоторых простейших систем векторов.

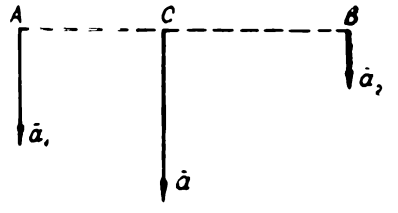
Пусть имеем систему двух скользящих векторов, линии действия которых параллельны между собой.

Рассмотрим сначала тот случай, когда векторы направлены в одну сторону. Возьмем два таких вектора $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, линии действия которых проходят через точки A и B (фиг. 44), причем линия AB есть любая прямая, перпендикулярная линиям действия векторов. Приведем эту систему к точке C отрезка AB, делящей этот отрезок на части, обратно пропорциональные величинам векторов, то есть удовлетворяющей условию

$$\frac{a_1}{BC} = \frac{a_2}{AC}. \qquad \text{(а)}$$

Отсюда

$$a_1 \cdot AC = a_2 \cdot BC.$$



Фиг. 44.

Отрезки AC и BC — плечи векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ относительно точки C, поэтому это равенство говорит об одинаковости модулей моментов векторов относительно этой точки. А так как векторы моментов противоположны друг другу, то при сложении они взаимно уничтожаются, и главный момент системы относительно C окажется равным нулю.

Следовательно, система двух параллельных векторов приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит через точку C и которая равна главному вектору

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2.$$

При составлении этой геометрической суммы векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ расположатся на одной прямой; так как они направлены в одну сторону, то модуль равнодействующей определится равенством

$$a = a_1 + a_2. \tag{12}$$

Составляя производную пропорцию, находим из (а):

$$\frac{a_1}{BC} = \frac{a_2}{AC} = \frac{a_1 + a_2}{AC + BC},$$

что согласно (12) и равенству $AC - BC = AB$ можно переписать в виде

$$\frac{a_1}{BC} = \frac{a_2}{AC} = \frac{a}{AB}. \tag{13}$$

Заметим, что соотношение (13) остается справедливым и при каком угодно косом расположении отрезка AB, ибо отсекаемые на нем всеми тремя векторами отрезки пропорциональны прежним отрезкам BC, AC и AB соответственно.

Таким образом, система двух параллельных скользящих векторов, направленных в одну сторону, может быть заменена направленной в ту же сторону равнодействующей, модуль которой равен сумме модулей векторов; линия действия равнодействующей делит любой соединяющий линии действия заданных векторов прямолинейный отрезок на части, обратно пропорциональные величинам векторов, внутренним образом.

В случае антипараллельных скользящих векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ (фиг. 45), считая, что $a_1 > a_2$, берем точку C на продолжении отрезка AB за бо́льшим по модулю вектором так, чтобы удовлетворялось то же соотношение (а). Тогда тем же путем убеждаемся в равенстве нулю главного момента системы относительно C, и, следовательно, система снова приводится к одному главному вектору

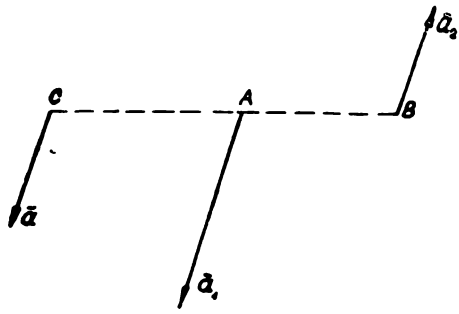
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,$$

который будет равнодействующей с линией действия, проходящей через C параллельно заданным векторам. При построении геометрической суммы векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ окажутся прямо противоположными; поэтому равнодействующая будет направлена в сторону большего по модулю вектора $\boldsymbol{a}_1$, имея численное значение

$$a = a_1 - a_2. \tag{14}$$

Составление производной пропорции дает тот же результат, так что формула (13) будет применима и в данном случае.

Полученные результаты говорят о том, что система двух антипараллельных скользящих векторов эквивалентна равнодействующей, направленной в сторону бо́льшего вектора и имеющей модуль, равный разности модулей векторов; линия действия равнодействующей лежит за большим вектором и делит любой соединяющий линии действия задан-

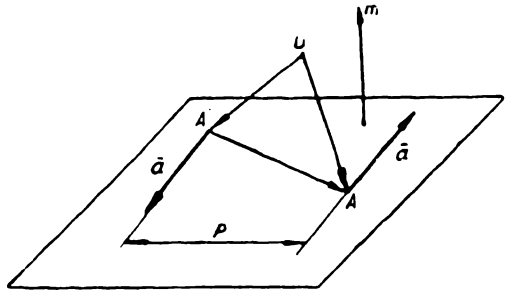


Фиг. 45.

ных векторов прямолинейный отрезок на части, обратно пропорциональные величинам векторов, внешним образом.

7. Пара скользящих векторов. Если два антипараллельных вектора равны по модулю, то $\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_2$, и главный вектор системы равен нулю. Такая система двух антипараллельных векторов называется парой скользящих векторов.

Пусть мы имеем пару скользящих векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ (фиг. 46). Плоскость, в которой лежат эти векторы, называется *плос-*



Фиг. 46.

костью пары, а расстояние p между их линиями действия—*плечом пары*.

Составим главный момент системы относительно произвольного центра O:

$$\boldsymbol{m} = \overline{OA} \times \boldsymbol{a} + \overline{OA'} \times \boldsymbol{a'},$$

где A и A' — точки приложения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a'}$ соответственно. Из чертежа видим, что

$$\overline{OA'} = \overline{OA} - \overline{A'A}.$$

Подставляя в предыдущее выражение и замечая, что $\boldsymbol{a'} = -\boldsymbol{a}$, находим

$$\boldsymbol{m} = -\overline{A'A} \times \boldsymbol{a'} = \overline{A'A} \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{r} = \overline{A'A}$ есть радиус-вектор точки приложения A вектора $\boldsymbol{a}$ относительно точки A'. Полученный главный момент системы не зависит от положения точки O и связан только с самой парой. Следовательно, он характерен для данной пары и называется поэтому просто *моментом пары*. Так как положение точки A' произвольно на линии действия вектора $\boldsymbol{a'}$, то можно дать такое определение: ***моментом пары называется момент одного из векторов пары относительно любой точки, лежащей на линии действия другого вектора пары.***

Величина момента пары согласно (15) равна произведению модуля одного вектора пары на ее плечо, то есть

$$m = ap.$$

Независимость главного момента пары от выбора центра приведения означает, что этот момент, то есть момент пары, есть свободный вектор. А так как момент пары является ее единственной характеристикой, то отсюда вытекает, что пара остается эквивалентной самой себе при следующих операциях над ней:

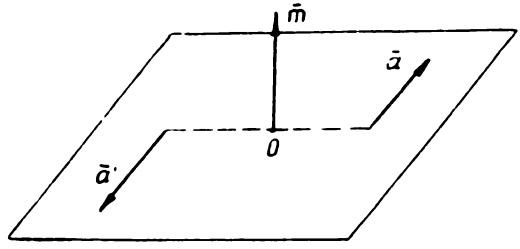
a) поворот и перенос пары в любое место ее плоскости;
b) перенос пары в любую другую плоскость, параллельную плоскости пары;
c) изменение модуля каждого вектора пары и ее плеча, при условии сохранения численного значения их произведения, равного модулю момента пары.

Из последнего вытекает, что у каждой пары с заданным моментом один из ее элементов—вектор или плечо—можно выбирать по произволу.

Обычно пару скользящих векторов и ее момент схематически изображают так, как показано на фиг. 47, беря точки приложения векторов пары на общем перпендикуляре к их линиям действия, а за точку приложения O момента пары—среднюю точку этого перпендикуляра.

Если имеется система пар скользящих векторов, то ее можно упростить приведением к произвольному центру.

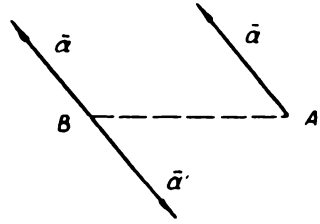
При этом главный вектор будет равен нулю, а главный момент окажется равным геометрической сумме моментов пар. Если же взять пару с моментом, равным этому главному моменту, то она окажется эквивалентной заданной системе пар. Таким образом, *всякая система пар скользящих векторов эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов пар системы.* Эта пара на-



Фиг. 47.

зывается *равнодействующей парой*, а сам процесс замены системы пар одной парой—*сложением пар.*

8. Общий случай системы скользящих векторов и частные случаи приведения. Последний результат позволяет по-новому истолковать смысл приведения любой системы скользящих векторов к произвольному центру.



Фиг. 48.

Пусть имеем некоторый скользящий вектор $\boldsymbol{a}$, приложенный в точке A (фиг. 48). Возьмем эквивалентную ему систему, присоединяя к вектору $\boldsymbol{a}$ эквивалентную нулю систему двух прямо противоположных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$, приложенных в некоторой другой точке B, причем $a' = a$. Тогда получим систему, состоящую из вектора $\boldsymbol{a}$, приложенного в точке B, и пары скользящих векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$, из которых первый приложен в A, а второй — в B. Поэтому вспоминая определение момента пары, получаем следующую лемму: *всякий скользящий вектор* $\boldsymbol{a}$, *приложенный в точке* A, *можно заменить таким же вектором, приложенным в другой точке* B, *и парой, момент которой равен моменту вектора* $\boldsymbol{a}$ *относительно точки* B.

Отсюда следует, что при приведении системы n скользящих векторов к какому-либо центру O, мы заменяем каждый вектор $\boldsymbol{a}_i$ таким же вектором, приложенным в O,

и парой, момент которой $\boldsymbol{m}_i$ равен моменту вектора $\boldsymbol{a}_i$ относительно O. Складывая перенесенные в центр векторы, получаем их равнодействующую

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i,$$

называемую главным вектором системы, а складывая образующиеся при этом приведении пары, находим их равнодействующую пару с моментом

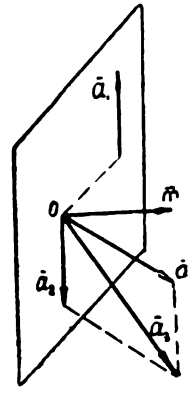
$$\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_i,$$

называемым главным моментом системы.

Таким образом, приводя систему скользящих векторов к центру, мы получаем эквивалентную ей простую систему, состоящую из одного скользящего вектора (главного вектора) и пары скользящих векторов, плоскость которой нормальна к главному моменту, являющемуся моментом этой пары.

Рассмотрим теперь частные случаи приведения, получающиеся в зависимости от значений инвариантов приведения.

1 Пусть инвариант $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{a}$ отличен от нуля. В этом случае будет существовать отличная от нуля инвариантная составляющая главного момента $\boldsymbol{m}^*$, и система, как мы видели, приводится к винту. Отличие от приведения к произвольному центру здесь будет состоять в том, что плоскость эквивалентной главному моменту пары будет ортогональна не только к этому моменту, но и к главному вектору.



Фиг. 49.

При приведении к какому-либо центру система заменяется тремя скользящими векторами — главным вектором и двумя векторами пары. Легко показать, что в данном случае систему можно привести к еще меньшему числу скользящих векторов, именно к двум. В самом деле, приведя систему к центру O, построим пару $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, отвечающую главному моменту $\boldsymbol{m}$ так, чтобы один из векторов пары, например $\boldsymbol{a}_2$, проходил через точку O (фиг. 49). Складывая геометрически главный вектор $\boldsymbol{a}$, приложенный в O, и вектор $\boldsymbol{a}_2$ получим эквивалентный им вектор $\boldsymbol{a}_3$, так что вся система окажется замененной двумя в общем случае не пересекающимися

скользящими векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$. Таким образом, система скользящих векторов, при неравенстве нулю второго инварианта, может быть приведена к двум векторам, не лежащим в одной плоскости, из которых один проходит через заданную точку O.

2. Пусть инвариант $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a}$ равен нулю. Здесь возможны очевидные еще более частные случаи.

a. Главный вектор $\boldsymbol{a}$ равен нулю, а главный момент $\boldsymbol{m}$ отличен от нуля; система приводится к паре скользящих векторов с моментом $\boldsymbol{m}$.

b. Главный момент $\boldsymbol{m}$ равен нулю, а главный вектор $\boldsymbol{a}$ не равен нулю. Тогда система приводится к одному вектору, то есть она будет иметь равнодействующую.

c. Главный момент перпендикулярен главному вектору. Так как в этом случае векторы пары, заменяющей главный момент, можно построить в одной плоскости с главным вектором, то при приведении системы к двум векторам найдем, что оба эти вектора окажутся лежащими в одной плоскости. Поэтому их можно перенести в точку пересечения их линий действия и сложить по правилу параллелограмма. Таким образом, в этом случае система векторов тоже может быть заменена одним вектором, то есть будет иметь равнодействующую.

Объединяя этот случай с предыдущим и замечая, что в обоих случаях главный вектор считается неравным нулю, можем высказать следующее положение: *для того, чтобы произвольная система скользящих векторов имела равнодействующую, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор был отличен от нуля, а его скалярное произведение на главный момент равнялось нулю.* Последнее означает, что главный момент должен или равняться нулю или быть перпендикулярным главному вектору. Таким образом, условия существования равнодействующей можно записать в виде

$$\boldsymbol{a} \neq 0, \quad \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a} = 0. \tag{16}$$

d. Главный вектор $\boldsymbol{a}$ и главный момент $\boldsymbol{m}$ оба равны нулю. В таком случае система скользящих векторов оказывается эквивалентной нулю или находящейся в равновесии.

§ 14. Сложное движение твердого тела

1. Относительное, переносное и абсолютное движения твердого тела. Полученные для сложного движения точки результаты могут быть обобщены на сложное движение твердого тела. Именно если твердое тело движется относительно некоторой среды S, которая в свою очередь движется относительно другой среды Σ, то движе-

ние тела относительно S называется относительным, его движение вместе со средой S—переносным, а движение относительно среды Σ — абсолютным. Ограничимся далее рассмотрением только скоростей точек тела. Тогда если $\boldsymbol{v}_r$ есть скорость какой-либо точки тела в его относительном движении, а $\boldsymbol{v}_e$—в переносном, то полная скорость $\boldsymbol{v}$ точки тела в абсолютном движении найдется по той же формуле (12—3), что и для изолированной точки:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r.$$

Как и в случае одной точки, этот результат можно распространить на случай любого числа сред, движущихся последовательно одна относительно другой. В этом случае для каждой точки тела будет применима формула (12—4) для абсолютной скорости

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i, \qquad (1)$$

если $n-1$—число указанных сред, движущихся одна относительно другой и относительно принятой за неподвижную среды Σ.

Если движения тела и всех промежуточных сред произвольны, то формула (1) дает скорость взятой точки тела в данный момент времени. Если же тело и все среды движутся поступательно, то (1) определяет скорость движения всего тела в данный момент, так что абсолютное движение тоже будет поступательным.

Как и в случае одной точки, выбор среды, принимаемой за неподвижную, с точки зрения кинематики произволен.

Формула (1) позволяет получать полную скорость точки тела простым суммированием скоростей, возникающих в тех движениях, в которых участвует тело. Это мы и будем делать, рассматривая различные частные случаи.

2. Сложение вращений. Пусть в данный момент тело участвует в двух мгновенных или постоянных вращениях с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Рассмотрим частные случаи такого движения.

а. Оси вращения пересекаются в одной точке. Так как угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ являются скользящими векторами, то мы можем, согласно теории этих векторов, заменить их равнодействующей, равной геометрической сумме

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, \qquad (2)$$

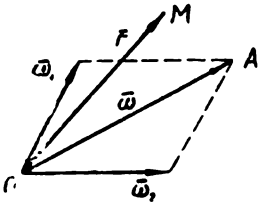
приложенной в точке пересечении O (фиг. 50) линий действия обоих векторов и являющейся диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах. Таким образом, ре-

зультирующее движение окажется вращением вокруг оси OA с угловой скоростью ω, определяемой по (2).

Следует заметить, что то же самое можно получить из непосредственного рассмотрения кинематики данной задачи. В самом деле, скорость точки A в сложном движении есть

$$v_A = \omega_1 \times \overline{OA} + \omega_2 \times \overline{OA};$$

каждое из векторных произведений по величине равно удвоенной площади равных треугольников, поэтому модули слагаемых равны; из чертежа же видно, что эти слагаемые направлены взаимно противоположно. Поэтому $v_A = 0$, и диагональ OA является осью вращения в сложном движении тела.



Фиг. 50.

Далее, обозначая через r радиус-вектор произвольной точки M тела относительно O, найдем, что скорость этой точки будет

$$v = \omega_1 \times r + \omega_2 \times r = (\omega_1 + \omega_2) \times r = \omega \times r,$$

где угловая скорость результирующего движения есть

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Тем самым мы пришли к тому же результату.

Если тело участвует не в двух, а в произвольном числе n вращений, оси которых пересекаются в одной точке, то последовательным сложением вращений найдем, что сложное движение тела явится вращением вокруг оси, проходящей через точку пересечения всех осей, с угловой скоростью

$$\omega \sum_{i=1}^{n} \omega_i. \tag{3}$$

b. Случай параллельных угловых скоростей. Пусть оси вращения параллельны между собой, а векторы угловых скоростей направлены в одну сторону (фиг. 51).

В этом случае нам нужно применить результат, полученный в предыдущем параграфе при рассмотрении двух параллельных скользящих векторов, направленных в одну сторону. Находим, что векторы ω_1 и ω_2 могут быть заменены одним равнодействующим вектором с модулем

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \tag{4}$$

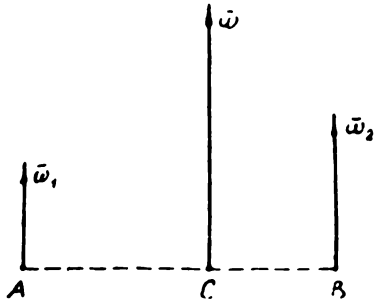
и линией действия, проходящей через такую точку C отрезка AB, пересекающего линии действия векторов, для которой согласно (13—13) будут справедливы соотношения:

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \qquad (5)$$

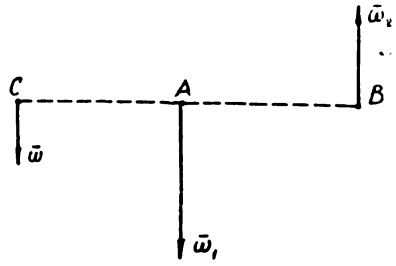
Следовательно, в данном случае результирующее движение будет вращением тела вокруг оси, параллельной заданным, лежащей в плоскости осей и делящей расстояние между ними на части, обратно пропорциональные величинам заданных угловых скоростей. Это вращение будет происходить в ту же сторону, что и заданные, а его угловая скорость по модулю будет равна сумме модулей обеих угловых скоростей.

с. Антипараллельные угловые скорости. Оси вращения по-прежнему параллельны, векторы же угловых скоростей направлены в противоположные стороны (фиг. 52). Для определенности предположим, что $\omega_1 > \omega_2$.

Тогда, опять применяя результаты предыдущего параграфа, найдем, что при введенных на чертеже обозначениях,



Фиг. 51.



Фиг. 52

аналогичных обозначениям фиг. 45, система двух антипараллельных угловых скоростей будет иметь равнодействующий вектор $\boldsymbol{\omega}$, модуль которого и положение точки C на прямой AB будут связаны с модулями заданных угловых скоростей, согласно (13—13) и (13—14), соотношениями

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \qquad (6)$$

Таким образом, в этом случае результирующее движение будет вращением тела вокруг оси, параллельной заданным, лежащей в их плоскости за осью большей угловой скорости и отстоящей от них на расстояниях, обратно пропорциональных величинам заданных угловых скоростей. Результирующее вращение будет совершаться в ту же сторону, что и вращение с большей угловой скоростью, а его угловая скорость будет иметь модуль, равный разности модулей обеих угловых скоростей.

d. Пара вращений. Рассмотрим случай равных по величине антипараллельных угловых скоростей, то есть, когда в предыдущем случае $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

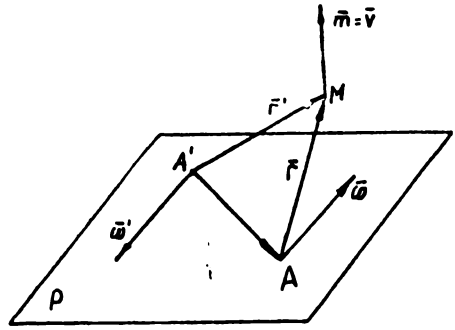
Возьмем пару угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}'$ (фиг. 53). Мы знаем, что всякая пара скользящих векторов эквивалентна своему моменту, который в данном случае будет согласно (13—15)

$$\boldsymbol{m} = \overline{A'A} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Установим смысл этого момента. Из чертежа видим, что

$$\overline{A'A} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ – радиусы-векторы произвольной точки тела M



Фиг. 53.

относительно точек A и A' соответственно. Подставляя и заменяя в первом слагаемом $\boldsymbol{\omega}$ через $\boldsymbol{\omega}'$, находим

$$\boldsymbol{m} = -\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}'.$$

Правая часть этого выражения есть ничто иное, как скорость точки M, вызываемая обоими вращениями; а так как момент пары есть вектор свободный, то и все точки тела будут иметь одну и ту же скорость

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m}. \tag{7}$$

Таким образом, пара вращений сообщает телу поступательную скорость, равную моменту пары. Эта скорость будет иметь величину

$$v = p\omega, \tag{8}$$

где p — плечо пары, и будет направлена перпендикулярно плоскости пары в соответствующую моменту пары сторону.

Обратно, всякое поступательное движение со скоростью $\boldsymbol{v}$ можно представить как движение, вызываемое парой вращений, лежащей в перпендикулярной к $\boldsymbol{v}$ плоскости и имею-

щей плечо и величину каждой угловой скорости, удовлетворяющие условию (8).

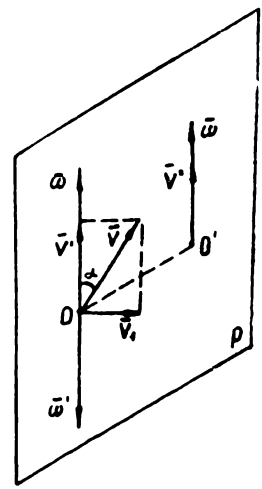
3. Сложение вращения и поступательного движения. Пусть тело вращается вокруг некоторой оси (мгновенной или занимающей в теле постоянное положение) с угловой скоростью ω и в то же время имеет поступательное движение со скоростью v. Оба этих вектора можем считать приложенными в некоторой точке O оси вращения (фиг. 54).

Угол между векторами ω и v обозначим через α. Разлагаем скорость v на составляющие v^* и v_1, направленные по вектору угловой скорости и нормально к нему соответственно, так что

$$v^* = v\cos\alpha,\quad v_1 = v\sin\alpha.$$

Проведя через O плоскость P, нормальную к вектору v_1, можем его заменить, по предыдущему, парой вращений (ω, ω'), беря модули векторов пары равными модулю заданной угловой скорости. Располагаем пару так, чтобы вектор ω' оказался прямо противоположным заданному вектору ω. Другой вектор пары ω, равный заданному и по направлению, будет иметь линию действия, параллельную оси вращения и проходящую через такую точку O' плоскости P, которая отстоит от заданной оси на расстоянии

$$OO' = \frac{v_1}{\omega} = \frac{v\sin\alpha}{\omega}.$$



Фиг. 54.

Тогда векторы ω и ω', действующие вдоль первоначальной оси вращения, будут взаимно уравновешиваться, и их можно отбросить. Перенося еще оставшийся вектор поступательной скорости v^*, как свободный, в точку O', видим, что движение тела приводится к винту, ось которого проходит через O'. Параметр винта будет

$$\tilde{p} = \frac{v^*}{\omega} = \frac{v\cos\alpha}{\omega}.$$

Тело, вращаясь с той же угловой скоростью вокруг оси винта, будет в то же время двигаться со скоростью v^* вдоль этой оси, то есть оно будет совершать винтовое движение (мгновенное или постоянное).

Если $\alpha = 0$, то вектор $\boldsymbol{v}$ будет направлен по оси вращения, и рассматриваемые движения непосредственно образуют винтовое движение с параметром

$$\tilde{p} = \frac{v}{\omega}$$

и осью, совпадающей с заданной осью вращения.

Если $\alpha = \pi/2$, то есть, если скорость $\boldsymbol{v}$ поступательного движения перпендикулярна к оси вращения, то $\boldsymbol{v}^* = 0$, и при точке O' мы получим единственный вектор $\boldsymbol{\omega}$. Следовательно, в этом случае поступательная скорость вызывает только смещение оси вращения в плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{v}$, в сторону, отвечающую заменяющей $\boldsymbol{v}$ паре вращений на расстояние, равное плечу пары.

4. Общий случай сложного движения твердого тела. Если тело в данный момент участвует в нескольких вращениях и, кроме того, имеет некоторое число поступательных скоростей, то мы можем каждую поступательную скорость заменить эквивалентной ей парой мгновенных угловых скоростей. Таким образом, общий случай движения тела всегда можно представить как вызванный одними только вращениями вокруг некоторых мгновенных осей.

Пусть $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ — угловые скорости этих вращений. Тогда задача сводится к сложению этих мгновенных угловых скоростей, то есть к сложению некоторой системы скользящих векторов. Приводя ее к произвольному центру O, найдем, согласно § 13, п. 8, что вся система может быть заменена главным вектором

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i \tag{9}$$

и главным моментом

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{r}_i$ — радиусы-векторы точек приложения векторов $\boldsymbol{\omega}_i$ относительно центра O. Главный момент $\boldsymbol{v}$, как момент результирующей пары, получающейся при приведении системы к центру, есть некоторая поступательная скорость. Таким образом, любой случай движения твердого тела можно представить как состоящее во всякий данный момент времени только из двух элементов: вращения с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, определяемой по (9), вокруг некоторой оси, проходящей через центр приведения, и одного поступательного движения со скоростью $\boldsymbol{v}$, определяемой по (10).

Применяя далее другие результаты теории скользящих векторов, найдем, что при перемене центра приведения вектор $\boldsymbol{\omega}$, как главный вектор системы, являющийся инвариантом, останется тем же самым, а главный момент относительно нового центра найдется, согласно (13—11), по формуле

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{\omega}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор старого центра относительно нового. Следовательно, при переходе к новому центру приведения вращение тела будет происходить вокруг мгновенной оси, параллельной прежней, с той же мгновенной угловой скоростью, поступательная же скорость согласно (11), вообще говоря, изменится как по величине, так и по направлению.

Другим инвариантом приведения явится скалярное произведение главного момента на главный вектор $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}$ или иначе проекция главного момента на главный вектор

$$v^* = v\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}). \tag{12}$$

Согласно (13—11) эта проекция может быть определена по формуле

$$v^* = \frac{pv_x + qv_y + rv_z}{\omega}, \tag{13}$$

где p, q, r — проекции главного вектора, v_x, v_y, v_z — главного момента на выбранные при центре приведения оси координат.

Прежде чем перейти к приведению системы к винту, заметим, что движение тела, состоящее из вращения вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью ω и поступательного движения вдоль этой оси с постоянной скоростью v, называется винтовым движением; ось вращения называется при этом осью винта. Очевидно, что при этом движении каждая точка тела движется по винтовой линии, которую можно считать расположенной на поверхности некоторого кругового цилиндра с осью, совпадающей с осью винта. Точка тела совершит один оборот вокруг оси винта за промежуток времени

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

испытав за то же время перемещение

$$h = vT = 2\pi\frac{v}{\omega}$$

параллельно оси. Величина h называется *шагом* винта, а отношение

$$\tilde{p} = \frac{v}{\omega} \tag{a}$$

носит название *параметра* винта; можно поэтому еще записать

$$h = 2\pi \tilde{p}.$$

Коллинеарность векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ позволяет выражение (a) записать также в векторной форме

$$\boldsymbol{v} = \tilde{p}\boldsymbol{\omega}. \qquad \text{(b)}$$

Так как векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ могут быть направлены как в одну сторону, так и взаимно противоположно, то в первом случае $\tilde{p} > 0$, а во втором $-\tilde{p} < 0$. Поэтому в формуле (a) под $\tilde{p}$ нужно понимать его алгебраическое значение, считая v проекцией скорости в натуральную величину на направление вектора $\boldsymbol{\omega}$.

В данном общем случае сложного движения мы должны считать тело свободным, участвующим в заданных вращениях с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_i$, направленными вдоль некоторых осей, связанных с телом. В то же время приведение системы скользящих векторов к центру мы осуществляли в пространстве, связанном с линиями действия этих векторов. Поэтому, применяя схему, представленную на фиг. 33, мы можем за центр приведения принять начало O подвижной системы координат $Oxyz$, связанной с телом; тогда рассматриваемая здесь поступательная скорость $\boldsymbol{v}$ (главный момент) будет совпадать со скоростью $\boldsymbol{v}_0$ полюса O.

Приводя систему к винту, мы найдем, что движение тела в каждый момент времени можно рассматривать как винтовое, в котором поступательная скорость $\boldsymbol{v}^*$ будет определяться формулами (12) или (13), а вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ окажется связанным с вектором $\boldsymbol{v}^*$ условием

$$\boldsymbol{v}^* = \tilde{p}\,\boldsymbol{\omega}. \qquad (14)$$

Так как оба элемента винта непрерывно изменяются, то это движение называется *мгновенным винтовым движением*, а его ось—*мгновенной винтовой осью*.

При движении тела положение мгновенной винтовой оси будет непрерывно меняться как в неподвижном пространстве, так и в пространстве, связанном с телом. Образующиеся таким путем геометрические места будут поверхностями с прямолинейными образующими, называемыми соответственно *неподвижным* и *подвижным аксоидами мгновенных винтовых осей*. Мгновенная винтовая ось в данный момент времени будет являться осью вращения и скольжения тела, то есть такой осью, вокруг которой тело вращается и в то же время скользит вдоль нее. Подвижный аксоид участвует вместе с телом в обоих этих движениях. Таким образом

общий случай сложного движения тела или движение свободного твердого тела можно представить качением со скольжением подвижного аксоида мгновенных винтовых осей по неподвижному аксоиду тех же осей.

Можно показать, что аксоидами в общем случае будут так называемые косые (неразвертывающиеся) линейчатые поверхности; примерами таких поверхностей могут служить однополостный гиперболоид, геликоид и т. п. Однако в частном случае аксоиды могут оказаться и развертывающимися поверхностями. Пусть, например, мгновенная ось вращения, определяемая направлением вектора ω и получающаяся при рассматриваемом полюсе, будет в дальнейшем перемещаться поступательно вместе с этим полюсом. Тогда и мгновенная винтовая ось, всегда параллельная мгновенной оси вращения для любого полюса будет также перемещаться поступательно, описывая цилиндрические поверхности как в неподвижном, так и подвижном пространстве.

Уравнения мгновенной винтовой оси в подвижной системе координат согласно (13—10) будут

$$\frac{v_x + qz - ry}{p} = \frac{v_y + rx - pz}{q} = \frac{v_z + py - qx}{r}. \tag{15}$$

Так как уравнения (15), в соответствии с порядком получения уравнений (13—10), получаются проектированием на оси $Oxyz$ равенства

$$\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) = \tilde{p}\,\boldsymbol{\omega},$$

то, записывая его в неподвижной системе отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$

$$\boldsymbol{v} - \{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) \times \boldsymbol{\omega}\} = \tilde{p}\,\boldsymbol{\omega}$$

и проектируя на оси этой системы, находим уравнения мгновенной винтовой оси в неподвижной системе координат:

$$\frac{\dot{\xi}_0 + q'(\zeta - \zeta_0) - r'(\eta - \eta_0)}{p'} = \frac{\dot{\eta}_0 + r'(\xi - \xi_0) - p'(\zeta - \zeta_0)}{q'} = \tag{16}$$

$$= \frac{\dot{\zeta}_0 + p'(\eta - \eta_0) - q'(\xi - \xi_0)}{r'}.$$

Уравнения соответствующих аксоидов получаются из уравнений (15) и (16) исключением времени, входящего в коэффициенты этих уравнений.

Рассмотрим далее частные случаи приведения, пользуясь результатами, установленными ранее для системы любых скользящих векторов.

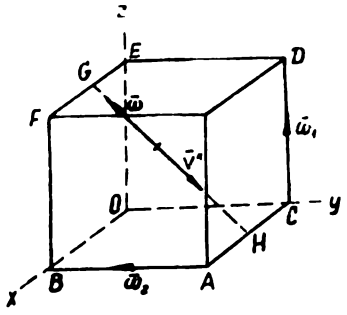
Если инвариант приведения $v \cdot \omega$ отличен от нуля, то движение тела приводится к винтовому, в строгом смысле этого слова. Можно также систему мгновенных угловых скоростей привести к двум векторам угловых скоростей, так что движение тела можно представить как полученное в результате наложения двух мгновенных вращений вокруг непересекающихся осей.

Если же инвариант $v \cdot \omega$ равен нулю, то опять могут иметь место различные частные случаи.

Так, если равняется нулю главный вектор ω, то система приводится к паре угловых скоростей с моментом v, и тело будет двигаться поступательно с этой скоростью.

Если же главный момент v равен нулю или перпендикулярен главному вектору, то система угловых скоростей приводится к равнодействующему вектору ω, так что тело будет совершать чисто вращательное движение вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией действия вектора ω для данного центра или полученной соответствующим параллельным переносом.

Наконец, если и главный вектор ω и главный момент v оказались равными нулю, то система эквивалентна нулю, и тело находится в точке.



Фиг. 55.

Пример 1. Куб с ребром a вращается одновременно с равными по величине угловыми скоростями ω_1 и ω_2 вокруг двух непараллельных и непересекающихся ребер AB и CD (фиг. 55). Требуется привести это движение к винтовому.

Приведем заданную систему угловых скоростей к центру O, составляя главный вектор

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

и главный момент

$$v = r_1 \times \omega_1 + r_2 \times \omega_2,$$

где r_1 и r_2 — радиусы-векторы точек A и C соответственно.

Проектируя эти выражения на указанные на чертеже оси координат и учитывая, что $\omega_2 = \omega_1$, находим, что

$$p = 0,\ q = -\omega_1,\ r = \omega_1;\ v_x = a\omega_1,\ v_y = 0,\ v_z = -a\omega_1.$$

Согласно (14) уравнения мгновенной винтовой оси будут

$$\frac{a\omega_1 - \omega_1 y - \omega_1 z}{0} = \frac{\omega_1 x}{-\omega_1} = \frac{-a\omega_1 + \omega_1 x}{\omega_1},$$

то есть

$$a - y - z = 0,\quad -x = -a + x$$

или

$$y + z = a,\quad x = \frac{a}{2}.$$

Следовательно, мгновенная винтовая ось пройдет через середины ребер AC и EF куба (линия GH).

Найдем элементы винта. Величина главного вектора будет та же, что и для центра O, то есть

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \omega_1 \sqrt{2}.$$

Скалярная величина главного момента будет по (13):

$$v^* = \frac{pv_x + qv_y + rv_z}{\omega} = \frac{-a\omega_1^2}{\omega_1 \sqrt{2}} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\omega_1.$$

Параметр винта есть

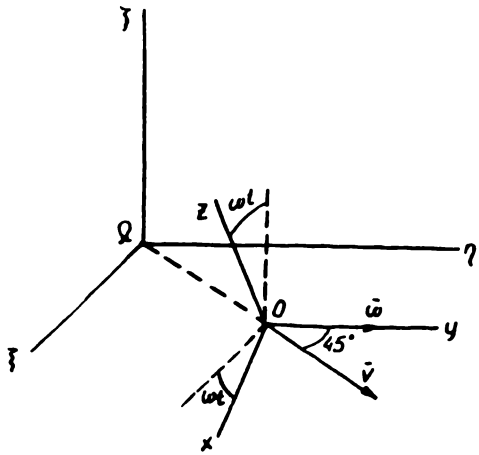
$$\tilde{p} = \frac{v^*}{\omega} = -\frac{a}{2}.$$

Знак минус говорит о том, что элементы винта $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}^*$ направлены прямо противоположно. Учитывая еще знаки проекций главного вектора, находим, что векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}^*$ расположатся на оси GH, как указано на чертеже.

Таким образом, тело будет вращаться вокруг оси GH с угловой скоростью ω и двигаться поступательно вдоль этой оси со скоростью v^* в соответствующую сторону.

Пример 2. В начальный момент $t = 0$ телу сообщена остающаяся в дальнейшем постоянной поступательная скорость v, и одновременно оно приведено в равномерное вращение с угловой скоростью ω вокруг оси, составляющей угол 45° с направлением поступательной скорости. Определить аксоиды мгновенных винтовых осей этого движения.

Плоскость векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ примем за неподвижную плоскость $\Omega\xi\eta$ (фиг. 56), линию действия вектора $\boldsymbol{\omega}$ примем за ось Oy подвижной си-



Фиг. 56.

стемы координат, оси которой взяты так, что в начальный момент они совпадут с осями неподвижной системы.

Ось Oy будет перемещаться поступательно, оставаясь мгновенной осью вращения для полюса O; оси же Ox и Oz к моменту времени t повернутся в своей плоскости на угол ωt относительно своего первоначального положения. Поэтому проекции угловой скорости и скорости полюса O на подвижные оси координат будут:

$$p = r = 0, \quad q = \omega,$$

$$v_{ox} = \frac{\sqrt{2}}{2} v \cos \omega t, \quad v_{oy} = \frac{\sqrt{2}}{2} v, \quad v_{oz} = \frac{\sqrt{2}}{2} v \sin \omega t.$$

Тогда согласно (15) уравнения мгновенной винтовой оси в подвижных осях принимают вид:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} v \cos \omega t + \omega z}{0} \quad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} v}{\omega} \quad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} v \sin \omega t - \omega x}{0},$$

или

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v}{\omega} \sin \omega t, \qquad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v}{\omega} \cos \omega t.$$

Исключая время t, находим отсюда уравнение подвижного аксоида

$$x^2 + z^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{\omega^2}.$$

Таким образом, подвижным аксоидом в данной задаче будет круговой цилиндр радиуса $\frac{v}{\omega \sqrt{2}}$, ось которого совпадает с осью Oy.

Проекции угловой скорости и скорости полюса O на неподвижные оси координат будут:

$$p' = r' = 0, \quad q' = \omega,$$

$$\dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} v, \quad \dot{\zeta}_0 = 0.$$

Координаты полюса O найдутся в виде

$$\xi_0 = \eta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} vt, \qquad \zeta_0 = 0.$$

Поэтому согласно (16) уравнениями мгновенной винтовой оси в неподвижной системе отсчета явятся уравнения:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} v + \omega \zeta}{0} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} v}{\omega} = \frac{-\omega \left(\xi - \frac{\sqrt{2}}{2} vt \right)}{0}$$

или

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} vt, \qquad \zeta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v}{\omega}.$$

Второе уравнение будет одновременно и уравнением неподвижного аксоида, который в этом случае будет плоскостью, параллельной плоскости $\Omega\xi\eta$, и лежащей ниже ее на расстоянии $\frac{v}{\omega \sqrt{2}}$. Первое же уравнение дает закон поступательного перемещения по этому аксоиду мгновенной винтовой оси, остающейся во все время движения параллельной оси $\Omega\eta$.

Б. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

§ 15. Законы Ньютона

В основу механики, как и других точных наук, кладутся положения, принимаемые за аксиомы и имеющие опытное происхождение. Аксиомы механики называются основными законами или принципами механики.

В качестве таких основных законов могут быть приняты различные положения. В обычном изложении берется система аксиом, носящая название законов Ньютона. Мы тоже будем следовать этому порядку.

Первый закон или *закон инерции: при отсутствии каких-либо воздействий со стороны других тел всякая материальная точка сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения.*

Прямолинейное равномерное движение точки иначе называется еще *инерциальным*. Нужно помнить, что данный закон, как и другие, формулируется для абсолютного движения точки. Поэтому применение этого закона допустимо тогда, когда можно пренебречь собственным движением тела отсчета. В дальнейшем мы увидим, что этот закон будет справедлив также в так называемых инерциальных системах отсчета.

В законе инерции содержится утверждение о том, что данное тело, принимаемое нами за материальную точку, само не может изменить свою скорость, а это изменение может появиться лишь в результате действия на него других тел. А так как все тела природы находятся в постоянном взаимодействии, то на практике закон инерции будет применим тогда, когда можно пренебречь влиянием других тел.

Рассмотрим теперь изолированную систему двух материальных точек. Взаимное влияние этих точек будет состоять в сообщении друг другу некоторых ускорений; эти ускорения будут зависеть от положения, движения, а также от некоторых физических свойств обеих точек, однако, как показывает опыт, отношение $w_1 : w_2$ величин их ускорений остается всегда неизменным. Отсюда вытекает, что обеим точкам будут отвечать такие связанные с ними постоянные положительные числа m_1 и m_2, что

$$m_1 w_1 = m_2 w_2. \qquad \text{(а)}$$

Число m_1 называется массой первой точки, m_2 — массой второй точки.

Соотношение, аналогичное (а), будет получаться для всякой другой материальной точки, находящейся во взаимодействии с первой точкой. Если массу первой точки (тела) принять за единицу, то массы других тел выразятся в выбранных таким путем единицах массы.

С другой стороны, разделяя тело на какие-либо части, можем утверждать, что сумма масс этих частей составит массу всего тела. Следовательно, массу можно рассматривать как меру количества материи, содержащейся в данном теле.

Современная физика внесла серьезные изменения в приведенное выше понятие о массе тел, установив зависимость массы от скорости движения тела. Поэтому вопрос об определении массы стал предметом широкого обсуждения, которое нельзя считать законченным до сих пор. В классической механике масса считается постоянной и рассматривается как единственное проявление материальности тел. Для механики важно лишь то, что *масса является мерой инерции данного тела*, то есть, что чем больше масса данного тела, тем меньшее ускорение оно получит под влиянием другого тела.

Ускорение, как известно, всегда имеет определенное направление и является некоторым вектором. Вектор же

$$F = mw \qquad (1)$$

называется *силой*, действующей на данную материальную точку. Таким образом, сила есть то действие на материальную точку со стороны какого-либо другого тела, которое сообщает этой точке определенное ускорение

Понятие о силе возникло из нашего мускульного ощущения, появляющегося при поднятии тяжестей: поднимая тяжелое тело с помощью физического усилия, мы сообщаем ему направленное вверх ускорение; при этом величина усилия при том же ускорении всегда будет прямо пропорциональной количеству материи в теле, то есть его массе.

Равенство (1) выражает *второй закон* или *основной закон динамики*:

Сила, действующая на материальную точку, пропорциональна вызываемому ею ускорению и направлена по этому ускорению.

Взаимодействие тел можно было бы представить каким-либо другим способом, не прибегая к понятию силы. Пример такого построения механики дал Герц Однако описание механического взаимодействия с помощью силы оказалось весьма удобным на практике, ибо всякую силу можно легко измерить сравнением с хорошо известной нам силой тяжести. В самом деле, применяя уравнение (1) к силе тяжести P тела, найдем

$$P = mg,$$

где g — ускорение земного притяжения. Это равенство позволяет определить массу тела

$$m = \frac{P}{g} \qquad (2)$$

и тогда любая сила, приложенная к нему, найдется по формуле (1), если будет известно вызываемое ею ускорение.

Формула (2) применяется для практического определения массы тел на земной поверхности. Если, например, за единицу массы принять массу тела, весящего один грамм, то масса любого тела будет численно равна его весу, выраженному в граммах.

Заметим, что, если вследствие отбрасывания частиц или их присоединения масса основной материальной точки будет изменяться, то второй закон получает другой вид. Движение таких тел рассматривается в особом отделе механики.

При отсутствии силы согласно второму закону ускорение материальной точки оказывается равным нулю. Следовательно, в этом случае вектор скорости оказывается постоянным, и мы приходим к закону инерции. Таким образом, этот закон не имеет самостоятельного значения, а является следствием второго закона. Включение же закона инерции в состав основных законов объясняется исторической традицией, а также его особой важностью.

В физической системе единиц LMT, в которой за основные единицы приняты единицы длины (L), массы (M) и времени (T), размерность силы будет

$$[F] = [m][w] = \frac{ML}{T^2}.$$

Поэтому, например, в системе CGS единицей силы является та сила, которая массе в 1 *г* сообщает ускорение 1 *см/сек*^{2}. Эта единица силы называется диной, так что

$$1\ дин = 1\ \frac{г\ см}{сек^2}.$$

В новой международной системе единиц SI за единицу массы и длины приняты килограмм и метр. Поэтому единицей силы в этой системе будет та сила, которая массе в 1 *кг* сообщает ускорение 1 *м/сек*^{2}. Такую силу называют ньютоном (*н*). Таким образом,

$$1\ н = 1\ \frac{кг\ м}{сек^2}.$$

В технической системе единиц MK_fS вместо единицы массы в качестве основной единицы берется единица силы, за которую обычно принимают вес тела с массой в 1 *кг*, имеющего ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}. Эту единицу обозначают через *кГ*. Единица массы здесь

будет производной единицей, равной массе того тела, которому сила в 1 *кГ* сообщает ускорение 1 *м/сек*^{2}. Таким образом,

$$1\ тех.ед.м. = 1\ \frac{кГ\ сек^2}{м}.$$

Так как в то же время

$$1\ кг = \frac{1}{9{,}81}\ \frac{кГ\ сек^2}{м},$$

то

$$1\ \text{тех. ед. м.} = 9{,}81\ кг.$$

Между единицами силы существуют очевидные соотношения:

$$1\ кГ = 9{,}81\ н = 9{,}81 \cdot 10^5\ дин,$$

$$1н = 10^5\ дин = \frac{1}{9{,}81}\ кГ.$$

Соотношение (а) с учетом (1) говорит о равенстве величин сил взаимодействия между двумя материальными точками. Опыт показывает, что в природе существуют силы, направленные по прямой, соединяющей взаимодействующие точки, в противоположные стороны; примерами таких сил являются сила всемирного тяготения, сила взаимодействия между двумя точечными электрическими зарядами. Существуют также силы другого рода, не подчиняющиеся этому правилу; такие силы встречаются, например, в различных магнитных и электродинамических явлениях. Классическая механика имеет дело только с силами первого вида. Называя одну из сил *действием*, а другую — *противодействием*, можем поэтому сформулировать следующий *третий закон* или *закон равенства действия и противодействия:*

Всякому действию отвечает равное и противоположно направленное противодействие.

Этим законом устанавливается парность всех сил природы. Если, например, лежащее на столе тело давит на него вниз с силой своего веса, то стол давит на тело с такой же силой, но направленной вверх; точно так же силы взаимного притяжения двух тел вселенной равны и противоположно направлены.

Если на материальную точку действует несколько сил, то из опыта известно, что вызываемые ими ускорения складываются геометрически. Отсюда вытекает следующий *четвертый закон* или *закон независимости действия сил:*

Если на материальную точку действует несколько сил, то они сообщают ей ускорение, равное геометрической сумме тех ускорений, которые они сообщили бы ей, действуя отдельно.

Это означает, что действие каждой силы не зависит от того, действует ли она одна или совместно с другими силами.

Таким образом, если на материальную точку действует n сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ..., $\boldsymbol{F}_n$, то по данному закону

$$m\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{F}_1,\ m\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{F}_2,\ \ldots, m\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{F}_n,$$

где m — масса точки, и

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \boldsymbol{w}_n.$$

Умножая последнее соотношение на массу m и учитывая предыдущие, находим, что

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i.$$

Сравнивая это равенство с формулой второго закона, видим, что *при действии на материальную точку нескольких сил она движется так, как если бы на нее действовала одна сила, равная геометрической сумме приложенных сил.*

В этом состоит важное следствие из четвертого закона.

Одна сила, эквивалентная какой-либо системе сил, как и для всякой системы векторов, называется равнодействующей этой системы. Таким образом, мы можем утверждать, что уравнение второго закона

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}$$

будет справедливо и в данном случае, только под силой $\boldsymbol{F}$ следует понимать равнодействующую всех сил, приложенных к материальной точке, и равную их геометрической сумме.

В частности, если к материальной точке приложены только две силы, то их равнодействующая будет

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2.$$

Это означает, что *две силы, приложенные к материальной точке, эквивалентны одной силе, равной диагонали параллелограмма, построенного на этих силах.* Ньютон исходил именно из этого закона параллелограмма сил, получая отсюда приведенную формулировку четвертого закона как следствие.

Если равнодействующая сил, приложенных к одной материальной точке, равна нулю, то ускорение этой точки обращается в нуль, и точка движется инерциально или остается в покое. Следовательно, такая система сил не оказывает никакого действия на материальную точку и поэтому называется находящейся в равновесии или эквивалентной нулю.

§ 16. Связи и аксиома связей. Идеальные связи

В § 8 мы уже дали определение свободной и несвободной систем материальных точек. В частности, если движе-

ние системы стеснено какими-либо препятствиями или ограничениями, то система называется несвободной. Эти препятствия или ограничения, мешающие свободному движению системы, принято называть *связями*. Так, для тела, принужденного двигаться по некоторой поверхности, эта поверхность является связью. Для системы, состоящей из двух материальных точек, соединенных нерастяжимым стержнем или нитью, этот стержень или нить тоже будут связями

Взаимодействие двух тел мы представили в виде силы, действующей на каждое из тел и связанной с ускорением данного тела вторым законом Ньютона. Следовательно, при действии таких сил на покоющееся тело последнее обязательно придет в ускоренное движение. Силы, которые могут зависеть от взаимного расположения, скоростей и физических свойств тел и которые вызывают движение покоящихся тел, называют *активными* силами.

Действие связей состоит в том, что они изменяют движение подчиненной им механической системы, которая в отсутствие связей двигалась бы иначе. Следовательно, действие связей тоже можно описать с помощью некоторых сил, называемых *реакциями* связей.

Реакции связей по своим свойствам существенно отличаются от активных сил. В то время, как активные силы вызывают движение покоящихся тел, реакции связей не могут этого делать; активные силы не зависят ни от других сил, ни от ускорений тел, к которым они приложены, тогда как реакции связей при равновесии тел определяются только активными силами, а при движении тел они зависят также и от их ускорений. Так, в приведенном ранее примере покоящегося на столе тела реакцией стола является сила, с которой стол действует на тело; эта реакция вызывается силой тяжести тела и под ее действием тело не может прийти ни в какое движение.

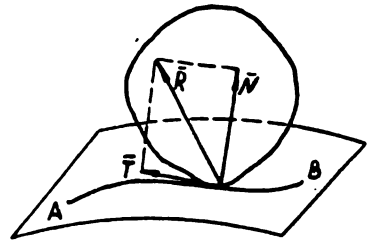
Вследствие всего этого реакции в противоположность активным силам называют *пассивными* силами.

В задачах механики существует еще одно важное отличие активных сил от пассивных. Именно: обычно активные силы заранее известны, реакции же нет, и их нужно найти в ходе решения задачи. Поэтому активные силы часто называют *заданными* (или *приложенными* силами).

При изучении равновесия или движения несвободных систем применяется следующая вытекающая из предыдущего рассмотрения *аксиома связей*:

Связи системы можно отбросить, заменив действие связей их реакциями и рассматривая систему как свободную, находящуюся под действием не только активных сил, но и реакций связей.

Если наложенная на материальную точку или твердое тело связь имеет вид поверхности или линии, то такая связь оказывает двоякое действие: она противодействует оказываемому на нее давлению и в то же время тормозит движение тела по связи. Поэтому реакция связи R будет иметь две составляющих (фиг. 57), одна из которых N направлена по нормали к связи, а другая T лежит в касательной плоскости к связи и направлена противоположно движению материальной точки; в случае твердого тела реакция T окажется направленной по касательной к траектории AB, описываемой на поверхности точкой соприкосновения тела со связью, в сторону, обратную движению этой точки.



Фиг. 57.

Составляющая N называется *нормальной реакцией* связи, а составляющая T — *силой трения*.

Сила трения возникает по разным причинам, имеющим физический характер. Так, если соприкасающиеся поверхности тела и связи шероховаты, то связь будет препятствовать скольжению тела по ней; поэтому в этом случае реакция T называется *силой трения скольжения*. Если же под действием нормального давления тела на связь последняя деформируется, образуя вмятину в окрестности точки соприкосновения, то тело будет вынуждено перекатываться через край вмятины, так что его движение по связи примет вид некоторого качения; в этом случае реакция T явится *силой трения качения*. Наконец, поверхность связи может оказывать сопротивление вращению тела вокруг нормали к связи; возникающее при этом трение носит название *трения верчения*.

Сила трения всегда значительно меньше нормальной реакции и часто этой силой можно пренебречь. В этом случае связь называется *идеальной* или *идеально гладкой*.

В том случае, когда связью является некоторая точка (например, точечная опора тела), то ее реакция может быть направлена как угодно. Если же эта реакция оказывается нормальной к поверхности опирающегося на точку тела, то связь тоже называется идеальной.

Связь может иметь также вид нерастяжимого стержня или гибкой нити, прикрепленной своим концом к данному телу. Эти связи оказывают сопротивление своему растяжению, а в случае стержня также и сжатию. Поэтому реакция такой связи направлена по стержню или нити. Определение идеальности этих связей мы рассмотрим в дальнейшем.

В. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 17. Общие положения и аксиомы статики. Трение скольжения и качения. Система сходящихся сил

1. Общие положения и аксиомы статики. Как мы говорили ранее, статика изучает условия равновесия тел или, точнее, условия равновесия сил, действующих на какую-либо механическую систему.

Статика делится на статику геометрическую или элементарную и статику аналитическую.

Аналитическая статика устанавливает наиболее общие условия равновесия механических систем; при этом в ней применяются в основном чисто аналитические методы. Изучением этой статики мы займемся позднее.

Геометрическая статика рассматривает способы, позволяющие привести совокупность сил, приложенных главным образом к одному абсолютно твердому телу, к простейшему виду и устанавливает условия равновесия этих сил. Изложение здесь носит наглядный геометрический характер, чему и обязано название этого отдела.

В соответствии с данным в § 13 определением совокупность сил, приложенных к какой-либо механической системе, в частности к абсолютно твердому телу, называется системой сил.

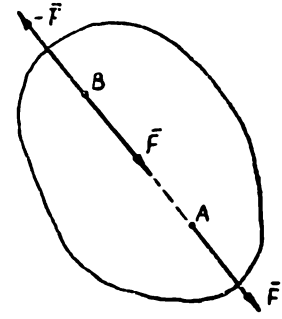
Две равные по модулю силы, приложенные в какой-либо одной точке тела и направленные в противоположные стороны, по закону параллелограмма сил имеют равнодействующую, равную нулю. Поэтому такая система двух сил, как указывалось ранее, находится в равновесии или эквивалентна нулю.

Этот результат распространяется и на тот случай, когда две прямо противоположные силы приложены в разных точках тела; распространяя на силы также и положение о сохранении действия системы сил при добавлении или отбрасывании системы, эквивалентной нулю, получаем следующие две аксиомы статики:

Аксиома 1. *Система двух равных по модулю сил, приложенных в двух точках абсолютно твердого тела и направленных по соединяющей эти точки прямой в противоположные стороны, находится в равновесии.*

Аксиома 2. *Действие какой-либо системы сил не нарушится, если к ней прибавить или от нее отнять систему сил, эквивалентную нулю.*

На основании этих аксиом легко показать, что приложенная к абсолютно твердому телу сила является скользящим вектором. В самом деле, пусть к точке A абсолютно твердого тела приложена сила $\boldsymbol{F}$ (фиг. 58). Не нарушая действия этой силы, мы можем по аксиоме 2 присоединить к ней эквивалентную нулю систему двух равных и противоположно направленных сил $\boldsymbol{F}$ и $-\boldsymbol{F}$, действующих по линии действия силы, приложенных в произвольной точке B этой линии и равных по величине заданной силе. По аксиоме 1 сила $\boldsymbol{F}$, приложенная в точке A, и сила $-\boldsymbol{F}$, приложенная в B, образуют эквивалентную нулю систему и поэтому могут быть отброшены. В результате остается лишь одна сила $\boldsymbol{F}$, приложенная в B; следовательно, сила $\boldsymbol{F}$ оказалась перенесенной в произвольную точку ее линии действия, что и доказывает наше утверждение.



Фиг. 58.

Таким образом, система сил, приложенных к абсолютно твердому телу, является системой скользящих векторов, и к ней полностью может быть приложена теория скользящих векторов, изложенная в § 13.

Для равновесия тел, не являющихся абсолютно твердыми, и вообще для всяких механических систем справедлива следующая так называемая *аксиома отвердевания*:

Равновесие любой механической системы не нарушается от наложения новых связей, в частности, оно не нарушается при внезапном превращении системы в абсолютно твердое тело.

Так, если система, состоящая из нескольких абсолютно твердых тел, находится в равновесии, то она останется в равновесии, если все тела неизменно связать друг с другом.

Аксиома отвердевания не имеет обратной силы: находящееся в равновесии абсолютно твердое тело при превращении в нетвердое может и не остаться в равновесии. Пусть, например, неизменяемый стержень находится в равновесии под действием приложенных к его концам двух равных и противоположно направленных сил, действующих вдоль стерж-

ня. Если теперь стержень внезапно превратится в нерастяжимую нить, то равновесие сохранится лишь при условии, если силы растягивают стержень, то есть, если они направлены внаружу стержня; если же эти силы направлены внутрь стержня, сжимая его, то равновесие, очевидно, нарушится.

Отсюда следует, что необходимые и достаточные условия равновесия абсолютно твердого тела оказываются необходимыми и для равновесия всякой механической системы, однако они недостаточны для этого равновесия.

2. Трение скольжения. Трение скольжения встречается повсюду как в природе, так и в технике. Однако до сих пор точные законы трения не установлены. Объясняется это многочисленностью факторов, оказывающих влияние на силу трения, таких, как степень шероховатости трущихся поверхностей, их влажность, температура, относительная скорость движения и т. д. Поэтому в настоящее время пользуются законами Кулона, установленными им еще в XVIII в. на основании многочисленных экспериментов и только приближенно описывающими данное явление.

Эти законы состоят в следующем.

1. Сила трения T лежит в общей касательной плоскости к поверхностям трущихся тел, тормозя движение одного тела по другому, и имеет величину, пропорциональную нормальной реакции N, действующей между телами. Таким образом,

$$T = \kappa N, \tag{1}$$

где коэффициент пропорциональности κ называется *коэффициентом трения скольжения* или просто коэффициентом трения.

2. Коэффициент трения не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей тел. Однако если одно из тел соприкасается с другим некоторым острым краем, то коэффициент κ значительно возрастает.

3. Коэффициент κ существенно зависит от материала трущихся тел и состояния поверхностей соприкосновения (шероховатость, влажность и т. д.). Смазка соприкасающихся поверхностей каким-либо жирным веществом значительно уменьшает κ.

Коэффициент κ зависит также от относительной скорости скольжения, монотонно уменьшаясь с ростом этой скорости. При отсутствии относительного движения его значение оказывается неопределенным, и с ростом силы, стремящейся сдвинуть тело относительно другого, κ тоже будет возрастать до некоторой предельной величины, называемой коэффициентом *статического* трения. При дальнейшем увеличении сдвигающей силы тело придет в движение, и коэф-

фициент трения упадет до его значения при движении, называемого коэффициентом *динамического* трения.

При движении зависимостью k от скорости обычно пренебрегают и считают его постоянным в некотором диапазоне скоростей.

Понятие о коэффициенте статического трения можно пояснить следующим образом. Пусть тело покоится на некоторой поверхности P (фиг. 59) и действует на эту поверхность с силой, составляющей некоторый угол φ с нормалью к поверхности. Тогда поверхность будет оказывать на тело действие, измеряемое реакцией $\boldsymbol{R}$, равной и противоположной действующей силе и составляющей с нормалью тот же угол φ. Нормальная реакция будет

$$N = R\cos\varphi,$$

а сила трения

$$T = R\sin\varphi.$$

Из формулы (1) находим, что

$$R\sin\varphi = kR\cos\varphi,$$

откуда

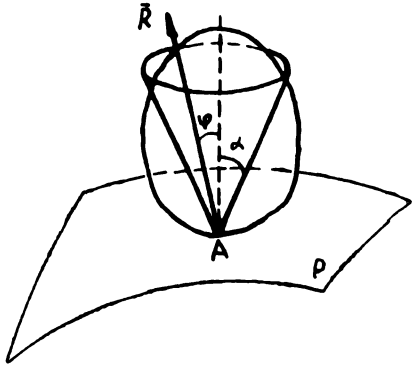
$$k = \operatorname{tg}\varphi.$$

Следовательно, коэффициент k зависит от угла φ.

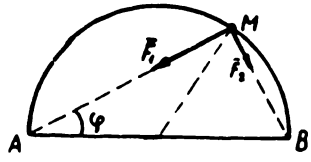
Предельное значение α угла φ, называемое *углом трения*, определит коэффициент статического трения. Таким образом, тело остается в покое, когда удовлетворяется неравенство

$$\varphi \leqslant \alpha,$$

а при $\varphi > \alpha$ обязательно начнет скользить по поверхности P.



Фиг. 59.



Фиг. 60.

Отсюда можно сделать такой вывод. Построим круговой конус с вершиной в точке соприкосновения тела с поверхностью P, с осью, идущей по нормали к телу, и полууглом раствора α. Этот конус называется *конусом трения*. Тогда, если приложенная к телу активная сила не выходит из этого конуса, то тело останется в покое, в противном же случае—придет в движение.

Пример. По внешней стороне полуокружности может скользить материальная точка M (фиг. 60), притягиваемая концами A и B диаметра с силами, пропорциональными расстояниям и равными c_1 и c_2 соответственно на единице расстояния. Найти, при каких значениях $\operatorname{tg}\varphi$ точка M не будет находиться в равновесии, если $c_1 : c_2 = 3 : 2$ и коэффициент трения есть $\kappa = 0{,}2$.

Если $AM = r_1$, $BM = r_2$, то по условию задачи силы притяжения, действующие на точку M, имеют величины

$$F_1 = c_1 r_1, \quad F_2 = c_2 r_2.$$

Сила нормального давления на окружность будет

$$N = c_1 r_1 \cos\varphi + c_2 r_2 \sin\varphi,$$

а сила, стремящаяся заставить точку двигаться по окружности,

$$F = c_1 r_1 \sin\varphi - c_2 r_2 \cos\varphi.$$

Точка будет двигаться по окружности при выполнении условия

$$F > \kappa N,$$

то есть, если

$$c_1 r_1 \sin\varphi - c_2 r_2 \cos\varphi > 0{,}2(c_1 r_1 \cos\varphi + c_2 r_2 \sin\varphi).$$

Деля это неравенство на $c_2 r_1 \cos\varphi$ и подставляя значения

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{r_2}{r_1} = \operatorname{tg}\varphi,$$

приходим к неравенству

$$\operatorname{tg}\varphi > 0{,}6 + 0{,}4\operatorname{tg}^2\varphi.$$

Отсюда искомые границы $\operatorname{tg}\varphi$ определяются уравнением

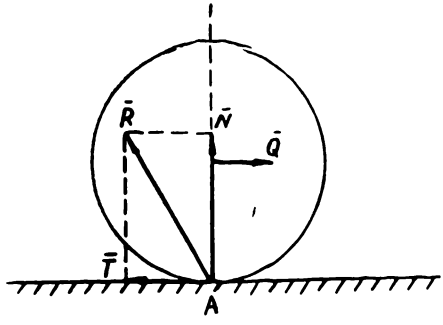
$$0{,}4\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}\varphi + 0{,}6 = 0,$$

что дает

$$\operatorname{tg}\varphi = 1 \text{ и } 1{,}5.$$

При всех значениях $\operatorname{tg}\varphi$ между этими границами точка M не будет находиться в равновесии.

3. Трение качения. Понятие о трении качения проще всего установить на примере качения кругового цилиндра по плоскости (фиг. 61). Если действующие на цилиндр активные силы как некоторую систему скользящих векторов привести к точке A, то в общем случае получим приложенные в этой точке главный вектор и главный момент, то есть силу и пару сил, которые и будут воздействовать на плоскость. Рассмотрим тот случай, когда и сила и пара лежат в плоскости поперечного сечения цилиндра. Сила, как и в предыдущем случае, будет давить на плоскость, стремясь в то же время заставить цилиндр скользить по плоскости, а пара будет стремиться привести цилиндр в ка-



Фиг. 61

чение по плоскости. Плоскость, в свою очередь, будет действовать на цилиндр с противоположными реакцией $\boldsymbol{R}$ и реактивной парой. Составляющая реакции $\boldsymbol{T}$ будет по-прежнему являться силой трения скольжения. Представим себе момент активной пары, как созданный тянущей цилиндр силой $\boldsymbol{Q}$, приложенной к его оси. Ее момент, как момент силы $\boldsymbol{Q}$ относительно центра приведения, будет иметь величину Qa, где a — радиус цилиндра.

При равновесии цилиндра с ростом силы Q будет возрастать не только сила трения скольжения T, но и момент противодействующей силе Q реактивной пары. Предельное значение модуля этого момента принимается пропорциональным нормальной реакции N, то есть равным δN, где коэффициент пропорциональности δ называется *коэффициентом трения качения*. В отличие от безразмерного коэффициента κ трения скольжения коэффициент δ имеет линейную размерность, а его численное значение, так же, как и для κ, определяется опытным путем.

Тогда очевидно, что если будет

$$Qa \leqslant N\delta$$

или

$$Q \leqslant \frac{\delta}{a} N,$$

качения не произойдет. Оно наступит лишь тогда, когда сила Q превысит величину, стоящую в правой части.

Иногда вводят безразмерный коэффициент трения качения

$$\mu = \frac{\delta}{a},$$

так что условие отсутствия качения можно взять в виде

$$Q \leqslant \mu N.$$

При движении силу трения качения считают равной μN. Неудобство этого коэффициента состоит, однако, в том, что он, как зависящий от радиуса цилиндра, имеет индивидуальный характер для каждого катящегося тела.

Физической причиной возникновения трения качения является всегда имеющаяся в действительности деформация плоскости и цилиндра в окрестности точки их соприкосновения, при которой цилиндр несколько вдавливается в плоскость; это задерживает движение точки A цилиндра и заставляет его вращаться вокруг образующей, проходящей через A, вызывая тем самым качение цилиндра.

Обычно коэффициент μ значительно меньше κ, поэтому при наличии скольжения трением качения часто пренебрегают. По этой же причине всюду, где требуется уменьшить

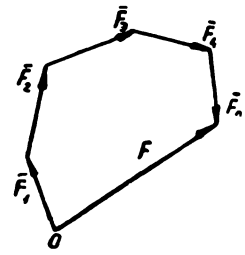
силу трения, стремятся заменить трение скольжения трением качения; на этом основано применение колес, катков, роликовых и шариковых подшипников и т. п. Наоборот, там, где желательно создать большее торможение движения, трение качения заменяют трением скольжения; например, на этом принципе строятся тормозные устройства велосипедов, автомашин и т. д., препятствующие вращению колес.

4. Система сходящихся сил. Одной из простейших является система, все силы которой приложены в одной точке твердого тела. Как мы знаем, такая система имеет равнодействующую, равную геометрической сумме сил. К этому же случаю сводится и всякая система сходящихся сил, то есть сил, линии действия которых пересекаются в одной точке O. Мы видели, что система сходящихся скользящих векторов имеет равнодействующую, равную их геометрической сумме и приложенную в точке O. Следовательно, если силы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots \boldsymbol{F}_n$ образуют систему сходящихся сил или, в частном случае, систему приложенных в одной точке сил, то эта система может быть заменена равнодействующей

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i, \tag{2}$$

приложенной в точке пересечения O линий действия этих сил.

Формула (2) указывает на геометрический способ определения равнодействующей сходящихся сил. Именно: построим геометрическую сумму сил, прилагая силу $\boldsymbol{F}_1$ в точке O, в конце силы $\boldsymbol{F}_1$ — силу $\boldsymbol{F}_2$, в ее конце — силу $\boldsymbol{F}_3$ и т. д. вплоть до силы $\boldsymbol{F}_n$ (фиг. 62). Составленная таким образом ломаная носит название многоугольника сил. Тогда равнодействующая $\boldsymbol{F}$ найдется как замыкающая силового многоугольника, имеющая начало в точке O, то есть в точке приложения первой силы, а конец — в конце последней силы $\boldsymbol{F}_n$.



Фиг. 62.

Аналитически равнодействующая может быть определена своими проекциями на выбранные оси координат. Проекции сил на оси координат будем в дальнейшем обозначать большими буквами X, Y, Z. Тогда из (2) для проекций равнодействующей найдем:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i. \tag{3}$$

Таким образом, проекции равнодействующей будут равны суммам соответствующих проекций всех сил системы.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы эквивалентная ей равнодействующая обращалась в нуль. Равенство же $\boldsymbol{F} = 0$ согласно (2) дает векторное условие равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0. \tag{4}$$

Следовательно, при равновесии системы сходящихся сил многоугольник сил должен быть замкнутым. Этот результат находит большое применение в задачах механики. Так, например, зная, что тело находится в равновесии под действием плоской системы трех сходящихся сил, две из которых известны, мы можем построением треугольника этих сил найти третью силу по величине и направлению, как замыкающую ломаной, построенной на известных силах. Нужно только учитывать, что в отличие от равнодействующей эта замыкающая будет идти при обходе контура треугольника в направлении сил так же, как и остальные силы.

В проекциях на оси координат уравнение (4) дает три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0. \tag{5}$$

Таким образом, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из осей координат равнялась нулю.

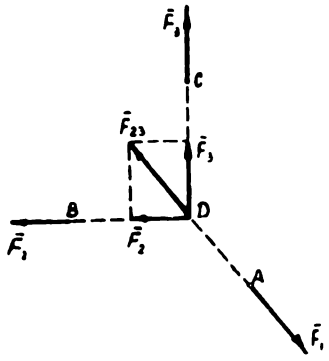
Если сходящиеся силы расположены в одной плоскости, то, беря эту плоскость за плоскость (xy), найдем, что последнее уравнение (5) будет отсутствовать.

Задачи статики, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия, называются *статически определимыми*. В противном же случае задачи являются *статически неопределимыми*, и для их решения нужно прибегать еще к каким-либо дополнительным уравнениям, например, уравнениям теории упругости, учитывающим деформируемость твердых тел.

Следовательно, чтобы задачи на равновесие тел, находящихся под действием сходящихся сил, были статически определимыми, число неизвестных в пространственном случае не должно превышать трех, а в плоском — двух.

В заключение установим важную теорему о трех силах: *если под действием трех сил, лежащих в одной плоскости, твердое тело находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

Пусть действующие на твердое тело три силы F_1, F_2, F_3 (фиг. 63) лежат в одной плоскости и приложены в точках A, B, C соответственно. Перенесем силы F_2, F_3 в точку D пересечения их линий действия. Сложив силы по правилу параллелограмма, найдем их равнодействующую F_{23}. Так как по условию система трех сил находится в равновесии, то сила F_1 должна уравновешивать силу F_{23} и, следовательно, будет иметь с ней общую линию действия; это означает, что ее линия действия обязательно проходит через точку D. Тем самым теорема доказана.

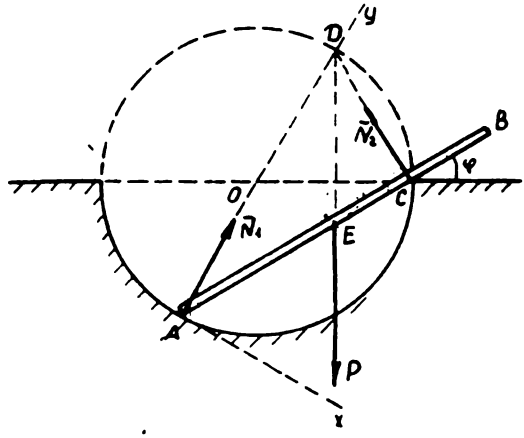


Фиг. 63.

Пример. В идеально гладкой сферической чаше радиуса a лежит однородный стержень $AB=2l$, имеющий вес P (фиг. 64). Определить угол φ при равновесии, а также найти реакции в точках A и C.

Вследствие идеальности связи реакция N_1 в точке A будет направлена по нормали к ней, то есть по радиусу сферы. Сам стержень тоже считаем идеально гладким, поэтому реакция N_2 опоры C будет нормальна к стержню. При этих условиях линии действия обеих реакций пересекутся в точке D окружности ACD.

Силу веса однородного стержня можно считать приложенной в его средине. Так как стержень находится под действием трех сил, то при



Фиг. 64.

равновесии он расположится так, что вертикальная линия действия силы P тоже пройдет через точку D.

Из геометрических соображений легко установить, что $\angle DAE = \varphi$, $\angle ADE = \pi/2 - 2\varphi$, $\angle AED = \pi/2 + \varphi$. Применяя к треугольнику ADE теорему синусов, находим

$$\frac{AE}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)}=\frac{AD}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}$$

или

$$\frac{l}{\cos 2\varphi}=\frac{2a}{\cos\varphi}. \qquad (а)$$

Отсюда находим уравнение для определения угла φ:

$$2a\cos 2\varphi - l\cos\varphi = 0.$$

Но

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1,$$

так что предыдущее уравнение перепишется в виде

$$4a\cos^2\varphi - l\cos\varphi - 2a = 0,$$

отсюда

$$\cos\varphi = \frac{l+\sqrt{l^2+32a^2}}{8a},$$

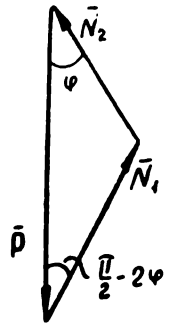
перед корнем взят знак плюс, ибо $\cos\varphi > 0$. Полученное выражение и определяет угол φ.

Для определения реакций строим многоугольник сил (фиг. 65), проводя реакции под известными из фиг. 64 углами с вертикалью. Применяя опять теорему синусов, получаем

$$\frac{N_1}{\sin\varphi}=\frac{N_2}{\cos 2\varphi}=\frac{P}{\cos\varphi},$$

отсюда

$$N_1 = P\operatorname{tg}\varphi, \quad N_2 = P\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$



Фиг. 65.

Выражение для N_2, пользуясь пропорцией (а), можно еще переписать в виде:

$$N_2 = P\frac{l}{2a}.$$

Величины реакций можно найти и аналитически. Для этого введем систему координат Axy, как указано на фиг. 64. Заметим, что оси координат следует выбирать так, чтобы уравнения равновесия принимали бы наиболее простой вид; так, при нашем выборе реакция N_1 войдет только в одно уравнение, что и облегчает решение задачи.

Составляя уравнения равновесия, находим:

$$\sum X \equiv P\cos 2\varphi - N_2\cos\varphi = 0,$$

$$\sum Y \equiv -P\sin 2\varphi + N_1 + N_2\sin\varphi = 0.$$

Из первого уравнения имеем

$$N_2 = P\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Подставляя во второе уравнение, получаем

$$-P\left(\sin 2\varphi - \frac{\sin\varphi\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\right) + N_1 = 0$$

или

$$-P\frac{\sin 2\varphi\cos\varphi-\cos 2\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi}+N_1=0,$$

откуда

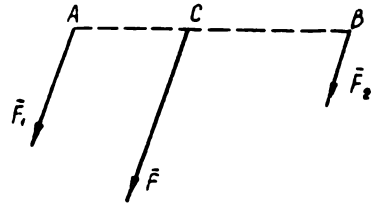
$$N_1=P\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=P\operatorname{tg}\varphi.$$

Тем самым пришли к тому же результату.

§ 18. Параллельные силы. Пара сил

1. Система двух параллельных сил. Применяя опять известные сведения из теории скользящих векторов, найдем, что если две параллельные силы F_1 и F_2 (фиг. 66) направлены в одну сторону, то они имеют равнодействующую F, направленную в ту же сторону и имеющую согласно (13 — 12) величину

$$F=F_1+F_2. \qquad (1)$$



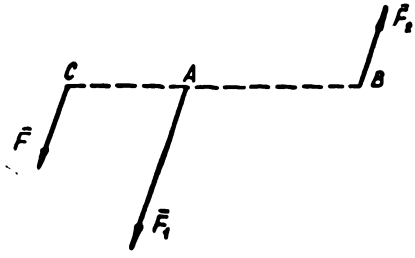
Фиг. 66.

При этом линии действия сил пересекают всякий непараллельный им отрезок в таких точках A, B, C, что будут согласно (13 — 13) справедливы соотношения

$$\frac{F_1}{BC}=\frac{F_2}{AC}=\frac{F}{AB}. \qquad (2)$$

Если же силы антипараллельны, то есть направлены в противоположные стороны (фиг. 67), то, при выполнении тех же соотношений (2), точка C будет лежать на продолжении отрезка AB за бо́льшей силой F_1, а равнодействующая F будет направлена в сторону этой бо́льшей силы, имея согласно (13 — 14) величину

$$F=F_1-F_2. \qquad (3)$$



Фиг. 67.

Если отрезок $AB=p$ взять перпендикулярным к линиям действия сил, то он явится плечом одной из заданных сил относительно любой точки, лежащей на линии действия другой силы; отрезки же $AC=p_1$ и $BC=p_2$ окажутся тогда плечами равнодействующей относительно точки, лежащей на линии действия одной из сил.

Для приложений удобно в соотношениях (2) освободиться от знаменателей, после чего они примут вид:

$$F_1 p_1 = F_2 p_2,\ F_1 p = F p_2,\ F_2 p = F p_1. \qquad (4)$$

Эти равенства говорят, очевидно, о том, что моменты любых двух из рассматриваемых трех сил F_1, F_2, F относительно точки, лежащей на линии действия третьей силы, равны друг другу по модулю.

2. Пара сил. В частном случае двух равных антипараллельных сил будем иметь пару сил.

Пара сил обладает всеми установленными ранее свойствами пары скользящих векторов. Следовательно, действие пары характеризуется только ее моментом. Этот момент является свободным вектором, так что пару сил можно переносить в любое место ее плоскости или в любую другую параллельную плоскость. При известном моменте пары один из ее элементов — силу или плечо — можно выбирать по произволу, тогда другой элемент найдется из условия неизменности величины момента пары.

Пара сил стремится привести тело во вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости пары и проходящей через середину прямолинейного отрезка, соединяющего точки приложения сил пары. Поэтому с первого взгляда кажется недопустимым перенос пары в плоскости ее действия. Однако дело здесь в том, что задание изолированной пары сил еще не определяет истинного движения тела. В самом деле, при отсутствии других сил, тело может еще участвовать в любом поступательном движении, происходящем с неизменяющейся во времени скоростью. Такое движение тела называется *инерциальным*. Как мы знаем из кинематики, сложение вращения с поступательным движением, имеющим скорость, перпендикулярную оси вращения, приводит к вращению вокруг соответственно смещенной оси. Таким образом, истинное движение тела будет зависеть еще от вида добавочного инерциального движения, в котором находится тело. При переносе пары сил мы и будем изменять только это инерциальное движение, не нуждающееся для своего поддержания ни в каких силах, что и доказывает с другой точки зрения эквивалентность перенесенной пары сил первоначальной паре.

Система любого числа пар сил эквивалентна одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов всех пар. Здесь следует указать на упрощение, возникающее в случае системы пар, лежащих в одной плоскости. Именно в этом случае векторы моментов пар имеют параллельные линии действия, перпендикулярные общей плоскости пар. Будем одно из направлений перпендикуляра к плоскости рассматривать как положительное. Тогда момент каждой

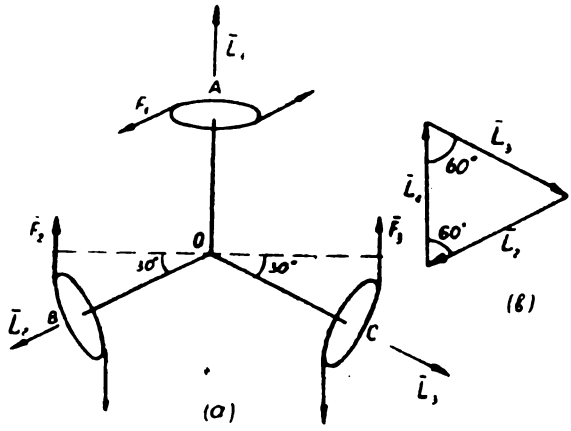
пары можно рассматривать как скалярную величину, имеющую знак плюс, если, смотря с указанного направления на плоскость, видим вращение пары направленным против стрелки часов, и знак минус — в противоположном случае. Следовательно, геометрическое сложение заменится здесь алгебраическим, и мы можем сказать, что плоская система пар эквивалентна одной паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов всех пар.

Для равновесия системы пар необходимо и достаточно исчезновение равнодействующей пары. Поэтому условие равновесия пространственной системы пар сил есть

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i = 0, \qquad (5)$$

где $\boldsymbol{L}_i$ — момент отдельной пары, а n — число пар. При равновесии плоской системы пар имеет место такое же алгебраическое равенство.

Пример. Три диска — A радиуса 20 *см*, B радиуса 5 *см* и C радиуса 10 *см* (фиг. 68) — жестко скреплены со стержнями OA, OB и OC, неизменно соединенными между собой в точке O, лежащими в одной



Фиг. 68.

плоскости и образующими между собой углы в 120°. К окружностям дисков в их плоскости приложены пары сил. Найти, в каком соотношении должны находиться величины сил F_1, F_2 и F_3 каждой пары, если система дисков находится в равновесии.

В соответствии с указанным на чертеже направлением сил пар векторы моментов пар $\boldsymbol{L}_1$ $\boldsymbol{L}_2$ и $\boldsymbol{L}_3$ должны быть направлены от центра O. По условию равновесия (5) эти моменты должны образовывать замкнутый векторный треугольник. Строя отдельно такой треугольник (фиг. 68 (*b*)), видим, что он будет равносторонним, так что величины моментов должны быть связаны равенством

$$L_1 = L_2 = L_3.$$

что иначе можно записать в виде

$$40F_1 = 10F_2 = 20F_3.$$

Отсюда искомое соотношение между силами пар будет

$$4F_1 = F_2 = 2F_3.$$

§ 19. Произвольная система сил. Частные случаи

1. Приведение к центру. Винт или динама. Пусть мы имеем произвольную систему сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, приложенных в точках тела, положение которых относительно некоторого центра O определяется радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$. Тогда в соответствии со сказанным в § 13, п. 8 эта система скользящих векторов может быть упрощена приведением к центру O, в результате чего она заменится силой

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \tag{1}$$

и парой сил с моментом

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i. \tag{2}$$

Сила $\boldsymbol{F}$, равная геометрической сумме всех сил системы, является *главным вектором* системы сил, а момент пары $\boldsymbol{L}$, равный геометрической сумме моментов всех сил относительно центра приведения, — *главным моментом* системы.

Вводя оси декартовых координат с началом в центре приведения O, будем иметь для проекций главного вектора:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i, \tag{3}$$

где X_i, Y_i, Z_i — проекции отдельных сил системы. Проекции главного момента, являющиеся в то же время главными моментами относительно координатных осей, будут:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \sum_{i=1}^{n} L_{ix} = \sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i), \\ L_y &= \sum_{i=1}^{n} L_{iy} = \sum_{i=1}^{n} (z_i X_i - x_i Z_i), \\ L_z &= \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь L_{ix}, L_{iy}, L_{iz} — моменты отдельных сил относительно координатных осей, а x_i, y_i, z_i — координаты точек приложения сил. В приложениях часто моменты сил относительно осей координат вычисляют, пользуясь данным в § 6 определением момента вектора относительно оси.

Применяя далее полученные в теории скользящих векторов результаты, имеем, что при переходе к другому центру приведения главный вектор остается неизменным, а главный момент меняется. Именно согласно формуле (13 — 7) главный момент относительно нового центра приведения будет

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор старого центра приведения относительно нового.

Кроме инварианта $\boldsymbol{F}$, будет существовать еще второй инвариант в виде скалярного произведения

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{F}$$

главного момента на главный вектор. В качестве второго инварианта может быть взята также проекция главного момента на направление главного вектора, то есть величина

$$L^* = L \cos(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{F}). \tag{6}$$

Как и всякая система скользящих векторов, система сил может быть приведена к винту, который в данном случае часто еще называется *динамой*. Это означает, что существует такая прямая, называемая *осью динамы* или *центральной осью* системы, для всех точек которой главный вектор и главный момент направлены вдоль этой прямой. При этом главный момент будет иметь алгебраическую величину, даваемую формулой (6). В координатных осях с началом в произвольном центре приведения O главный момент для динамы согласно (13 — 11) может быть определен через проекции на эти оси главного вектора и главного момента для центра O в виде

$$L^* = \frac{L_x X + L_y Y + L_z Z}{F}. \tag{7}$$

Уравнения оси динамы в тех же осях координат будут, по (13 — 10), иметь вид:

$$\frac{L_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{L_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{L_z - (xY - yX)}{Z}; \tag{8}$$

здесь x, y, z — текущие координаты точек оси.

Пример. По ребрам правильного тетраедра действуют шесть равных сил величиной P каждая (фиг. 61). Требуется привести данную систему сил к динаме, если длина каждого ребра тетраедра равна a.

Выберем оси координат, принимая плоскость грани OBC за плоскость (xy). Для вычисления проекций сил необходимо знать угол α между плоскостью какой-либо грани и наклоненным к ней ребрам. Строя высоту тетраедра AE, найдем, что

$$\cos\alpha = \frac{CE}{CA}.$$

Но точка E есть точка пересечения медиан треугольника OBC. А так как медиана CD есть в то же время высота треугольника, то

$$CD = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Следовательно,

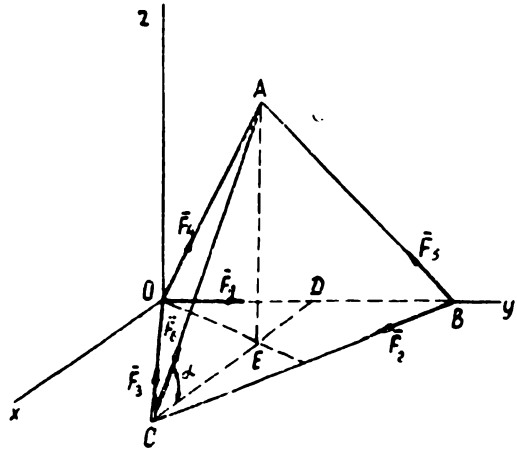
$$CE = \frac{2}{3}CD = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Учитывая, что $CA = a$, находим

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Фиг. 69.

Тогда проекции сил и координаты точек их приложения можно представить следующей таблицей (см. табл. на стр. 136).

Отсюда находим проекции главного вектора:

$$X = \sum X_i = 0,\quad Y = \sum Y_i = 0,\quad Z = \sum Z_i = \sqrt{6}\,P.$$

Следовательно, главный вектор параллелен оси z и имеет величину

$$F = \sqrt{6}\,P.$$

	X_i	Y_i	Z_i	x_i	y_i	z_i
F_1	0	P	0	0	0	0
F_2	$\frac{\sqrt{3}}{2}P$	$-\frac{1}{2}P$	0	0	a	0
F_3	$-\frac{\sqrt{3}}{2}P$	$-\frac{1}{2}P$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	0
F_4	$\frac{\sqrt{3}}{6}P$	$\frac{1}{2}P$	$\frac{\sqrt{6}}{3}P$	0	0	0
F_5	$\frac{\sqrt{3}}{6}P$	$-\frac{1}{2}P$	$\frac{\sqrt{6}}{3}P$	0	a	0
F_6	$\frac{\sqrt{3}}{3}P$	0	$\frac{\sqrt{6}}{3}P$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	0

Проекции главного момента будут:

$$L_x = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = \frac{\sqrt{6}}{2} Pa,$$

$$L_y = \sum (z_i X_i - x_i Z_i) = -\frac{\sqrt{2}}{2} Pa.$$

$$L_z = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = \frac{\sqrt{3}}{2} Pa.$$

Главный момент для динамы окажется равным

$$L^* = \frac{L_x X + L_y Y + L_z Z}{F} \quad L_z = \frac{\sqrt{3}}{2} Pa.$$

Уравнения оси динамы согласно (8) примут вид:

$$\frac{\frac{\sqrt{6}}{2} Pa - \sqrt{6} Py}{0} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} Pa + \sqrt{6} Px}{0} = \frac{Pa\frac{\sqrt{3}}{2}}{P\sqrt{6}}.$$

Отсюда следует, что числители первых двух отношений равны нулю, что после сокращений позволяет уравнения оси динамы получить в виде

$$x = \frac{\sqrt{3}}{6} a, \quad y = \frac{1}{2} a.$$

Эти выражения совпадают со значениями координат x и y точки E или A. Таким образом, ось динамы будет прямой, параллельной оси z и совпадающей с высотой тетраедра AE. При этом оба элемента динамы направлены по этой оси в сторону положительного направления оси z.

2. Частные случаи приведения. Если второй инвариант $L \cdot F$ отличен от нуля, то, как и всякая другая си-

стема скользящих векторов, система сил приводится к винту или динаме, то есть к одной силе и одной паре, плоскость которой нормальна к силе. Можно также систему сил привести к двум силам, не лежащим в одной плоскости, у которых линия действия одной из сил проходит через выбранную точку.

Если же второй инвариант $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{F}$ равен нулю, то возможны несколько частных случаев:

a) $\boldsymbol{F}=0$, $\boldsymbol{L}\neq 0$. Система сил приводится к паре сил с моментом $\boldsymbol{L}$.

b) $\boldsymbol{F}\neq 0$, $\boldsymbol{L}=0$ или $\boldsymbol{L}$ перпендикулярен к $\boldsymbol{F}$. Система сил приводится к равнодействующей. Таким образом, условия существования равнодействующей произвольной системы сил состоит в том, что главный вектор системы отличен от нуля, а главный момент или равен нулю, или перпендикулярен главному вектору, то есть

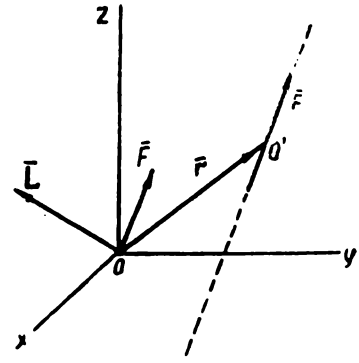
$$\boldsymbol{F}\neq 0,\quad \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{F}=0. \tag{9}$$

c) $\boldsymbol{F}=0$, $\boldsymbol{L}=0$. Система сил эквивалентна нулю или иначе — находится в равновесии.

Рассмотрим более подробно два последних случая.

3. Теорема Вариньона. Линия действия равнодействующей. Для случая существования равнодействующей справедлива теорема Вариньона: *момент равнодействующей относительно какого-либо центра равен геометрической сумме моментов всех сил системы относительно того же центра.*

Для доказательства заметим, что точка приложения равнодействующей может рассматриваться как такой центр приведения, для которого главный момент системы сил равен нулю. Беря эту точку за „новый" центр приведения O', а выбранный нами произвольный центр O (фиг. 70)— за „старый" центр, мы должны в формуле (5)



Фиг. 70.

$$\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{F}$$

положить $\boldsymbol{L}'=0$. За начало отсчета примем центр O. Тогда радиус-вектор точки приложения равнодействующей будет $\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r}_0$, и записанная формула дает

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{L}. \tag{a}$$

Так как равнодействующая равна главному вектору для любого центра приведения, то левая часть полученного ра-

венства есть момент равнодействующей относительно центра O. Стоящий же в правой части главный момент равен сумме моментов всех сил относительно того же центра, так что получаем

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i.$$

Тем самым теорема доказана.

Если от центра O' перейти к любому центру, тоже лежащему на линии действия равнодействующей, то по формуле (5) легко убедиться, что главный момент относительно этого нового центра равен нулю. Следовательно, равнодействующая, как и следовало ожидать, тоже является скользящим вектором. Поэтому равенство (а) справедливо для любой точки линии действия равнодействующей и является векторным уравнением этой линии. Проектируя это уравнение на оси координат, указанные на фиг. 70, получаем скалярные уравнения линии действия равнодействующей:

$$yZ - zY = L_x, \quad zX - xZ = L_y, \quad xY - yX = L_z, \tag{10}$$

где x, y, z — текущие координаты этой линии. Из этих уравнений независимых будет, конечно, только два, третье является их следствием. В самом деле, умножая, например, второе уравнение на Y, третье на Z и складывая, находим

$$-X(yZ - zY) = YL_y + ZL_z. \tag{b}$$

Но из условия существования равнодействующей

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{F} = XL_x + YL_y + ZL_z = 0$$

следует

$$YL_y + ZL_z = -XL_x.$$

Подставляя в (b) и сокращая $-X$, приходим к первому уравнению (10).

4. Равновесие системы сил. Мы установили, что если главный вектор и главный момент системы сил равны нулю, то эта система находится в равновесии; наоборот, если система сил находится в равновесии, то при приведении к любому центру главный вектор и главный момент должны исчезать. Таким образом, равенства

$$\boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{L} = 0$$

являются необходимыми и достаточными условиями равновесия системы сил. Эти условия можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0. \tag{11}$$

В проекциях на оси декартовых координат с началом в цент-

ре приведения эти два векторных уравнения дают следующие шесть скалярных уравнений равновесия:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} L_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} L_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Уравнения моментов могут быть взяты также в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \tag{13}$$

Таким образом, для равновесия системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из осей координат и сумма моментов всех сил относительно каждой из осей равнялись нулю.

Наличие шести уравнений равновесия говорит о том, что в задачах статики число неизвестных не должно превышать шести. В противном случае система сил окажется статически неопределимой.

В задачах на равновесие тел неизвестными обычно будут реакции связей, которым подчинено данное тело. Но, кроме того, неизвестными могут быть и другие величины — какая-либо активная сила, координаты точки приложения силы и т. п.

Если линия действия реакции известна, то в уравнениях равновесия данной реакции будет отвечать лишь одна неизвестная — величина реакции. В общем случае в эти уравнения войдут в качестве неизвестных все три проекции реакции на оси координат.

Пример. Невесомая прямоугольная пластинка длиною $AB = l = 4$ *м* и шириной $AD = b = 2$ *м* (фиг. 71) укреплена в точке A, а в точке E опирается на острие вертикальной колонки, причем $AE = e = 3$ *м*; пластинка наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30°$. К углу B приложена горизонтальная сила $Q = 5$ *кГ*, перпендикулярная к BC; на угол D по нормали к пластинке действует сила $P = 4$ *кГ*. Найти расстояние точки E от AB и AD при равновесии, а также определить реакции в точках A и E.

Выберем оси координат, беря за начало точку A, а плоскость пластинки за плоскость (xy). Искомые расстояния точки E являются ее координатами x_E и y_E. Реакция острия E направлена по нормали к пластинке в сторону оси z, реакция же угла A неизвестна по направлению, поэтому нужно искать все три ее проекции X_A, Y_A, Z_A.

При составлении уравнений равновесия следует иметь в виду, что сила Q лежит в плоскости (yz), составляя с осью y угол α.

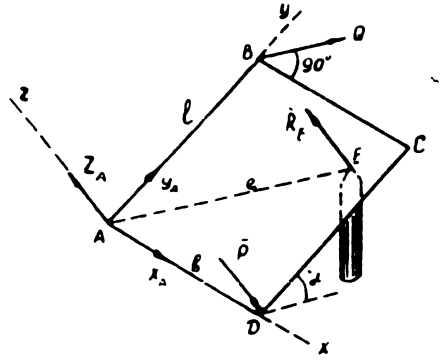
Уравнения равновесия будут:

$$\sum X = X_A = 0, \quad \sum Y = Y_A - Q\cos\alpha = 0,$$

$$\sum Z = Z_A - Q\sin\alpha - P + R_E = 0,$$

$$\sum L_x = Ql\sin\alpha + R_E y_E = 0, \quad \sum L_y = -R_E x_E + Pb = 0,$$

$$\sum L_z = 0 = 0.$$



Фиг. 71.

Из четвертого и пятого уравнений имеем

$$R_E^2(x_E^2 + y_E^2) = P^2b^2 + Q^2l^2\sin^2\alpha.$$

Так как $x_E^2 + y_E^2 = e^2$, то отсюда находим

$$R_E = \frac{1}{e}\sqrt{P^2b^2 + Q^2l^2\sin^2\alpha} = \frac{1}{3}\sqrt{16.4 + 25.16\cdot\frac{1}{4}} \approx 4{,}27\ кГ.$$

Из тех же уравнений получаем:

$$x_E = \frac{Pb}{R_E} = \frac{4.2}{4{,}27} \approx 1.87\ м, \quad y_E = \frac{Ql\sin\alpha}{R_E} = \frac{5.4\cdot 1/2}{4{,}27} \approx 2{,}34\ м.$$

Из остальных уравнений находим:

$$X_A = 0, \quad Y_A = -Q\cos\alpha = -5\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -4{,}33\ кГ.$$

$$Z_A = Q\sin\alpha + P - R_E = 5\cdot\frac{1}{2} + 4 - 4{,}27 = 2{,}23\ кГ.$$

Отсюда

$$R_A = \sqrt{Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{4{,}33^2 + 2{,}23^2} = 4{,}87\ кГ.$$

5. Плоская система сил. Рассмотрим далее два важных частных случая сил. Первым из них будет тот, когда все силы системы лежат в одной плоскости.

Примем плоскость сил за координатную плоскость (xy), беря, как и ранее, начало координат в центре приведения O. Тогда главный вектор окажется лежащим тоже в плоскости (xy), а главный момент будет перпендикулярным этой плоскости, ибо момент каждой силы обладает этим свойством. Отсюда следует, что для плоской системы сил второй инвариант $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{F}$ всегда равен нулю, так что такая система имеет единственный инвариант — главный вектор

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i. \tag{14}$$

Как и в общей теории плоской системы пар скользящих векторов, мы можем в данном случае момент каждой пары, получающейся при приведении данной силы к центру, а следовательно, момент каждой силы относительно центра O рассматривать как величину алгебраическую, имеющую знак плюс, если сила относительно центра приведения направлена против стрелки часов, и знак минус — в противоположном случае. Тогда и главный момент будет алгебраической величиной с соответствующим знаком. Считая, в соответствии со сделанным выбором знака моментов, ось z направленной от чертежа задачи к нам, получаем, что главный момент есть

$$L=L_z=\sum_{i=1}^{n}L_i=\sum_{i=1}^{n}(x_iY_i-y_iX_i). \tag{15}$$

При перемене центра приведения главный момент относительно нового центра O' согласно (5) окажется равным

$$L'=L+L_{O'}(\boldsymbol{F}),$$

где $L_{O'}(\boldsymbol{F})$ — момент главного вектора, приложенного в старом центре, относительно нового центра.

Так как в данном случае всегда $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{F}=0$, то единственным условием существования равнодействующей плоской системы сил является неравенство нулю главного вектора, то есть условие $\boldsymbol{F}\neq 0$.

Уравнение линии действия равнодействующей согласно третьему выражению (10) будет

$$xY-yX=L.$$

Если главный вектор $\boldsymbol{F}=0$, а главный момент $L\neq 0$, то система сил приводится к паре с моментом L.

Если же $\boldsymbol{F}=0$ и $L=0$, плоская система сил находится в равновесии. Учитывая выражения (14) и (15), получаем отсюда следующие уравнения равновесия плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} L_i = 0. \tag{16}$$

Уравнение моментов можно взять в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \tag{16'}$$

Таким образом, необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сил состоят в том, что сумма проекций всех сил на каждую из произвольно выбранных осей координат равна нулю и сумма моментов всех сил относительно произвольно взятого центра тоже равна нулю.

Наличие только трех условий равновесия говорит о том, что плоская система сил будет статически определимой, если число неизвестных не превышает трех.

Условия равновесия плоской системы сил могут быть взяты и в другой форме, даваемой следующей *теоремой о трех моментах: для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно каждого из трех произвольных не лежащих на одной прямой центров равнялась нулю.*

Необходимость сформулированных условий вытекает непосредственно из третьего уравнения (16), справедливого относительно любого центра.

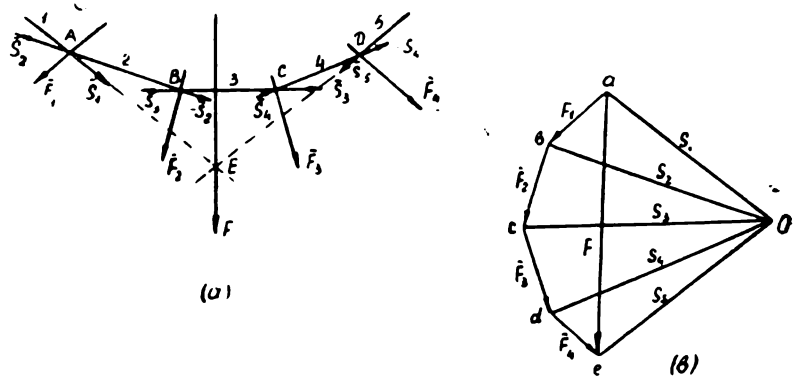
Для доказательства достаточности заметим, что в силу условий теоремы при приведении системы к любому из указанных центров она может приводиться только к одному главному вектору, то есть к равнодействующей. Но тогда линия действия этой равнодействующей должна проходить через все три центра, что невозможно, ибо центры не лежат на одной прямой. Следовательно, равнодействующая должна равняться нулю, и поэтому система сил находится в равновесии.

6. Графическое решение задачи о приведении плоской системы сил к простейшему виду. В статике и особенно в ее технических приложениях находят применение специальные графические методы. Эти методы составляют содержание особого отдела, называемого *графической статикой*. В качестве примера рассмотрим графическое решение задачи об упрощении плоской системы сил.

Допустим сначала, что мы имеем произвольную плоскую систему сил (фиг. 72 (а)), главный вектор которой отличен от нуля. Как мы знаем, такая система имеет равнодействующую. Для определения ее величины и направления строим на отдельном чертеже (b) многоугольник сил в выбранном

масштабе. Замыкающая этого многоугольника и даст равнодействующую F. Для полного решения задачи остается найти лишь линию действия равнодействующей.

С этой целью на чертеже (b) берем произвольный полюс O и соединяем его лучами S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 с началом и концом каждой силы. Берем затем произвольную точку A на линии действия силы F_1 и проводим через нее линии 1 и 2, параллельные соотьетственно лучам S_1 и S_2 многоугольника сил; при этом прямую 2 проводим до пересече-



Фиг. 72.

ния с линией действия силы F_2 в точке B. Из точки B параллельно лучу S_3 проводим прямую 3 до пересечения в точке C с линией действия силы F_3. Из C таким же образом строим прямую 4, параллельную лучу S_4, и, наконец, из точки пересечения ее D с линией действия силы F_4 проводим прямую 5, параллельную лучу S_5. Полученная таким путем ломаная 1, 2, 3, 4, 5 называется *веревочным многоугольником* или *многоугольником Вариньона* для данной системы сил. Заметим, что число лучей S_i так же, как и число сторон веревочного многоугольника, оказывается на единицу больше числа сил.

По предыдущему, каждая из сил может быть заменена двумя силами, действующими вдоль тех сторон веревочного многоугольника, которые пересекаются на линии действия данной силы и которые параллельны и равны по величине лучам плана сил, идущим в начало и конец данной силы. Таким образом, окажется, что сила F_1 заменится силами $S_1 = \overline{aO}$ и $S_2 = \overline{Ob}$, идущими по сторонам 1 и 2 веревочного многоугольника, сила F_2 — силами $-S_2 = bO$ и $S_3 = \overline{Oc}$, идущими по сторонам 2 и 3 того же многоугольника и т. д. вплоть до последней силы, в данном случае — F_4, заменяю-

щейся силами $-\boldsymbol{S}_1 = \overline{aO}$ и $\boldsymbol{S}_5 = \overline{Oe}$, идущими по сторонам 4 и 5. Тогда из чертежа (фиг. 72 (*a*)) видно, что вдоль каждой внутренней стороны этого многоугольника будут действовать две равные и противоположно направленные силы, которые поэтому будут взаимно уничтожаться, и система сил окажется эквивалентной двум силам $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_5$, действующим вдоль крайних сторон веревочного многоугольника. Равнодействующая же двух сил, лежащих в одной плоскости, имеет линию действия, проходящую через точку пересечения линий действия обеих сил. Таким образом, для определения линии действия равнодействующей заданной системы сил достаточно продолжить крайние стороны веревочного многоугольника до взаимного их пересечения в точке E; тогда линия, параллельная полученной на чертеже (*b*) равнодействующей и проходящая через E, и будет искомой линией действия равнодействующей.

Если же главный вектор плоской системы сил равен нулю, то силовой многоугольник окажется замкнутым, то есть конец вектора последней силы совпадает с началом первой силы. Это означает, что в нашем случае четырех сил луч S_5 совпадет с лучом S_1. Поэтому в плоскости сил крайние стороны веревочного многоугольника окажутся параллельными друг другу. Так как при этом сила $\boldsymbol{S}_1 = \overline{aO}$ направлена к полюсу O, а сила $\boldsymbol{S}_5 = \overline{Oe}$ направлена от полюса, то силы $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_5$, равные друг другу по величине, окажутся направленными в противоположные стороны. Следовательно, в этом случае система приведется к паре сил.

Пусть, например, система трех сил (фиг. 73) имеет замкнутый силовой многоугольник. Строя веревочный многоугольник, находим, что его крайние стороны 1 и 4 параллельны друг другу, и вдоль них действуют силы $\boldsymbol{S}_1$ и $-\boldsymbol{S}_1$, образующие пару.

Возможен еще более частный случай, когда при замкнутости многоугольника сил крайние стороны веревочного многоугольника будут лежать на одной прямой, то есть когда веревочный многоугольник тоже окажется замкнутым. Тогда идущие по этой прямой две равные по величине и противоположно направленные силы взаимно уничтожатся, и система сил будет находиться в равновесии.

Таким образом, известные ранее для плоской системы сил результаты на языке графостатики могут быть сформулированы следующим образом:

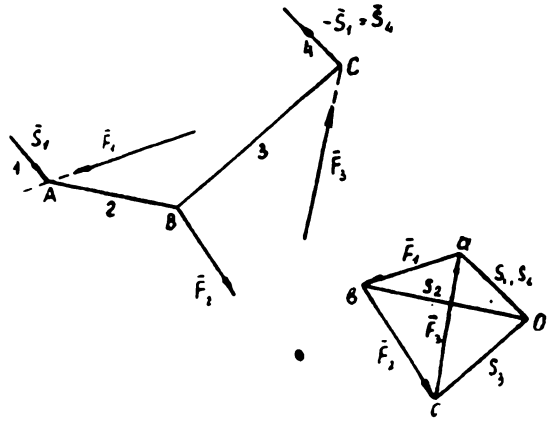
если силовой многоугольник не замкнут, то данная плоская система сил приводится к равнодействующей;

если силовой многоугольник замкнут, а веревочный не замкнут, система приводится к паре сил;

если силовой и веревочный многоугольники оба замкнуты, то плоская система сил находится в равновесии.

Очевидно, будут справедливы и обратные положения.

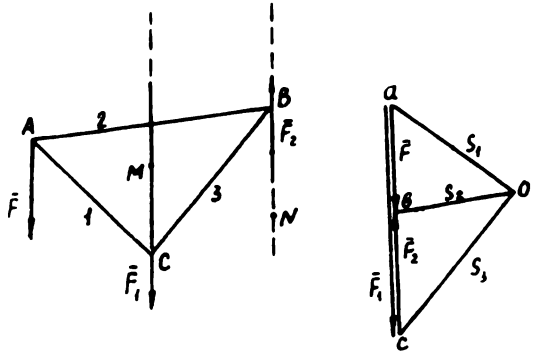
Применение веревочного многоугольника позволяет чисто графически решать разнообразные задачи статики. Рассмотрим один пример.



Фиг. 73.

Пример. Требуется данную силу F (фиг. 74) разложить на две антипараллельные силы, линии действия которых должны проходить через заданные точки M и N.

Для заданной силы строим силовой треугольник Oab и с его помощью получаем стороны веревочного много-



Фиг. 74.

угольника 1 и 2, проводя их до пересечения с линиями действия искомых сил в точках B и C. Соединяя эти точки прямой, получаем сторону 3 веревочного многоугольника,

параллельно которой строим луч S_3 на плане сил, имея в виду, что вследствие параллельности сил этот луч должен заканчиваться на продолжении отрезка ab в точке c. Так как на плане сил к началу и концу данной силы идут те лучи, которые параллельны сторонам веревочного многоугольника для этой силы, то вектор $\overline{ac}$ будет силой $\boldsymbol{F}_1$, проходящей через точку M, а вектор $\overline{cb}$ — силой $\boldsymbol{F}_2$, проходящей через N. Направление каждой из сил находится из того соображения, что заданная сила, как равнодействующая, должна быть замыкающей силового многоугольника, построенного на силах $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$.

7. Система параллельных сил. Пусть мы имеем систему произвольного числа параллельных сил $\boldsymbol{F}_i$ ($i = 1, 2, ..., n$), приложенных в точках, положение которых относительно некоторой точки O определяется радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_i$. Для общности будем считать, что одна часть сил направлена в одну сторону, а другая в противоположную. Обозначим через $\boldsymbol{F}^\circ$ единичный вектор одного из направлений сил. Тогда, приводя систему к центру O, найдем, что ее главный вектор будет

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}^\circ \sum_{i=1}^{n} F_i = \boldsymbol{F}^\circ F, \tag{17}$$

где величина главного вектора

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i \tag{18}$$

является алгебраической суммой величин отдельных сил, ибо в этой сумме силы, имеющие противоположное $\boldsymbol{F}^\circ$ направление, следует взять со знаком минус.

Для главного момента получаем

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}^\circ F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}^\circ. \tag{19}$$

Составляя второй инвариант, находим, что

$$\boldsymbol{F}.\boldsymbol{L} = \boldsymbol{F}^\circ F. \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}^\circ \right) = 0$$

как смешанное произведение с двумя коллинеарными векторами $\boldsymbol{F}^\circ F$ и $\boldsymbol{F}^\circ$.

Отсюда следует, что если $\boldsymbol{F} \neq 0$, то система параллельных сил приводится к равнодействующей, равной, как мы знаем, главному вектору для любого центра приведения, то есть определяемой формулами (17) и (18). Таким обра-

зом, в этом случае система параллельных сил имеет равнодействующую, параллельную силам и равную по величине алгебраической сумме всех сил.

Если же $\boldsymbol{F} = 0$, то возможны два случая:

1. Главный момент $\boldsymbol{L} \neq 0$. Тогда система приводится к паре сил с моментом $\boldsymbol{L}$.

2. $\boldsymbol{L} = 0$. Здесь возможны два еще более частных случая:

а. Равенство $\boldsymbol{L} = 0$ получается за счет параллельности векторов

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \boldsymbol{r}_i \text{ и } \boldsymbol{F}^\circ,$$

входящих в выражение (19). Если тогда все силы повернуть в одну сторону на один и тот же угол, не меняя точек приложения сил, то первый вектор останется неизменным, а вектор $\boldsymbol{F}^\circ$ получит другое направление, так что параллельность векторов нарушится, и $\boldsymbol{L}$ станет отличным от нуля. Таким образом, в этом случае система параллельных сил находится в равновесии для данного направления сил.

b. Если же $\boldsymbol{L} = 0$ вследствие равенства

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \boldsymbol{r}_i = 0,$$

то при указанном выше повороте это равенство не нарушится, и главный момент останется равным нулю. Следовательно, в этом случае система останется в равновесии при любом направлении сил. Такое равновесие принято называть *безразличным* или *астатическим*.

Возвратимся к случаю существования равнодействующей. Векторное уравнение линии действия равнодействующей найдется с помощью теоремы Вариньона в виде

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i,$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор произвольной точки этой линии. Полагая $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{F}^\circ$ и $\boldsymbol{F}_i = F_i \boldsymbol{F}^\circ$, можем это уравнение записать в форме

$$F\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}^\circ = \sum_{i=1}^{n} F_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}^\circ.$$

Отсюда следует, что на линии действия равнодействующей существует такая точка $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_c$, для которой

$$F\boldsymbol{r}_c = \sum_{i=1}^{n} F_i \boldsymbol{r}_i, \tag{20}$$

так что

$$r_c = \frac{1}{F}\sum_{i=1}^{n} F_i r_i. \qquad (21)$$

Как видим, при неизменных r_i, то есть при одних и тех же точках приложения сил, положение этой точки не зависит от направления сил, и она останется той же самой при общем повороте сил на один и тот же угол. Поэтому точка, определяемая формулой (21), называется *центром параллельных сил.*

Возьмем систему декартовых координат с началом в центре приведения O. Проектируя (21) на эти оси, найдем для координат центра параллельных сил выражения:

$$x_c = \frac{1}{F}\sum_{i=1}^{n} F_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{F}\sum_{i=1}^{n} F_i y_i, \quad z_c \quad \frac{1}{F}\sum_{i=1}^{n} F_i z_i. \qquad (22)$$

Входящая в (21) сумма

$$\sum_{i=1}^{n} F_i r_i$$

носит название *статического момента* системы параллельных сил *относительно центра O* (начала координат). Точно так же суммы

$$\sum_{i=1}^{n} F_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} F_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{n} F_i z_i,$$

входящие в формулы (22), называются *статическими моментами* системы параллельных сил относительно *координатных плоскостей* (yz), (zx) и (xy) соответственно.

Равенство (20), а также получаемые из (22) равенства

$$\sum_{i=1}^{n} F_i x_i = F x_c, \quad \sum_{i=1}^{n} F_i y_i = F y_c, \quad \sum_{i=1}^{n} F_i z_i = F z_c$$

говорят о том, что статический момент системы параллельных сил равен соответствующему статическому моменту равнодействующей этих сил.

§ 20. Центр тяжести и центр масс

1. Общие понятия и случай системы материальных точек. Силой тяжести или силой веса называется та сила, с которой Земля притягивает к себе данное тело. Эта сила направлена к Земле по линии отвеса, то есть параллельно нити, на которой подвешен какой-либо груз. Линия отвеса называется еще вертикалью, а перпендикулярная к ней плоскость — горизонтальной плоскостью.

Пусть мы имеем какую-либо систему n материальных точек с массами $m_i (i = 1, 2, ..., n)$, находящуюся под действием сил тяжести. Допустим, что общие размеры системы не слишком велики, так что можно пренебречь различием в направлении сил тяжести отдельных точек системы. Тогда можно считать, что точки системы находятся под действием вертикально направленных параллельных сил тяжести $P_i (i = 1, 2, ..., n)$. Поэтому эти силы имеют равнодействующую, являющуюся весом всей системы и направленную вертикально вниз. Точка приложения этой равнодействующей, называемая *центром тяжести* системы, найдется из того соображения, что она не должна изменяться при любом повороте системы как неизменяемого целого. С вательно, центр тяжести системы есть центр параллельных сил тяжести и его радиус-вектор относительно произвольного начала определится по формуле (19 21) в виде

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} P_i \boldsymbol{r}_i, \tag{1}$$

где

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i \tag{2}$$

есть вес всей системы. Отсюда координаты центра тяжести будут

$$x_c = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} P_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} P_i y_i, \quad z_c = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} P_i z_i. \tag{3}$$

Будем считать, что вертикальные размеры системы настолько невелики, что ускорение силы тяжести g можно считать постоянным. Обозначая массу всей системы через M и имея в виду, что

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i, \tag{4}$$

сделаем подстановку в предыдущие формулы, полагая

$$P_i = m_i g, \quad P = \sum_{i=1}^{n} m_i g = g\sum_{i=1}^{n} m_i = Mg.$$

Сокращая g, получим для радиуса-вектора и координат рассматриваемой точки выражения:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i, \tag{5}$$

$$x_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i,\quad y_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i,\quad z_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{6}$$

Точка, определяемая формулой (5) или формулами (6), называется *центром масс* или *центром инерции* системы. Согласно предыдущему изложению, для систем не слишком больших размеров, находящихся под действием силы тяжести, центр масс совпадает с центром тяжести системы. Однако понятие центра масс является более общим, ибо формулы (5), (6) могут быть применены для любых систем и при любых условиях. В частности, мы можем рассматривать центр масс систем, настолько удаленных от Земли, что практически ни о какой силе тяжести, а следовательно, и центре тяжести говорить не приходится.

Следует также иметь в виду, что для систем достаточно больших размеров центр масс системы будет отличаться от центра тяжести, для которого формулы (1), (2), (3) становятся неприменимыми.

2. Центр тяжести и центр масс тела. Всякое тело мы можем разбить на сколь угодно малые частицы, имеющие каждая вес ΔP. Этот вес приложен в центре тяжести каждой частицы, но по ее малости можем рассматривать силу ΔP, как приложенную просто к частице. По формуле (1) для радиуса-вектора центра тяжести всего тела будем иметь

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{P}\sum \boldsymbol{r}\,\Delta P;$$

здесь P — полный вес всего тела, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор отдельной частицы, а суммирование распространено на все частицы. Обозначая через γ удельный вес тела, то есть вес единицы объема тела, можем сделать замену $\Delta P = \gamma \Delta\tau$, где $\Delta\tau$ — объем частицы. Тогда

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{P}\sum \gamma\,\boldsymbol{r}\,\Delta\tau.$$

Переходя в этом выражении к пределу, устремляя число частиц к бесконечности, найдем

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{P}\int_{\tau} \gamma\,\boldsymbol{r}\,d\tau \tag{7}$$

или в декартовых координатах

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{P}\iiint_{\tau} \gamma\,\boldsymbol{r}\,dx\,dy\,dz. \tag{7'}$$

Интегрирование распространяется на весь объем тела τ.

Координаты центра тяжести тела найдутся в виде

$$x_c = \frac{1}{P}\int_\tau \gamma\, x\, d\tau, \quad y_c = \frac{1}{P}\int_\tau \gamma\, y\, d\tau, \quad z_c = \frac{1}{P}\int_\tau \gamma\, z\, d\tau. \tag{8}$$

Как и для системы, формулы (7) и (8) справедливы только для тел, размеры которых не слишком велики, в том смысле, как об этом говорилось выше.

Аналогично, обозначая через Δm массу отдельной малой частицы, находим из (5) для центра масс тела

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\sum \boldsymbol{r}\,\Delta m,$$

что при таком же переходе к пределу дает

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\int_\tau \boldsymbol{r}\, dm \tag{9}$$

или, имея в виду, что $dm = \mu\, d\tau$, где μ – плотность тела (масса единицы объема):

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\int_\tau \mu\, \boldsymbol{r}\, d\tau. \tag{9'}$$

Координаты центра масс определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M}\int_\tau x\, dm = \frac{1}{M}\int_\tau \mu x\ d\tau, \\ y_c &= \frac{1}{M}\int_\tau y\, dm = \frac{1}{M}\int_\tau \mu y\ d\tau, \\ z_c &= \frac{1}{M}\int_\tau z\, dm = \frac{1}{M}\int_\tau \mu z\ d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Если тело однородно, то есть γ и μ постоянны во всем теле, то $P = \gamma\tau$ и $M = \mu\tau$. Подставляя эти выражения в (7), (8), (9), и (10) и сокращая γ или μ, приходим к одинаковым для центра тяжести и центра масс формулам:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{\tau}\int_\tau \boldsymbol{r}\, d\tau, \quad x_c = \frac{1}{\tau}\int_\tau x\, d\tau, \quad y_c = \frac{1}{\tau}\int_\tau y\, d\tau, \quad z_c = \frac{1}{\tau}\int_\tau z\, d\tau. \tag{11}$$

Таким образом, в данном случае центр тяжести тела найдется как центр тяжести объема тела. Входящие в фор-

мулы (11) интегралы называются *статическими моментами объема* тела.

В некоторых случаях массу тела можно считать распределенной по некоторой поверхности S (например, для какой-либо оболочки, пластины и т. д.). Вводя поверхностные удельный вес γ' и плотность μ', можем вместо весов и масс элементарных объемов ввести веса и массы элементарных площадок $\gamma' dS$ и $\mu' dS$. Тогда формулы (7) и (9) принимают вид

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{P}\int_S \gamma' \boldsymbol{r}\, dS, \quad \boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\int_S \mu' \boldsymbol{r}\, dS$$

с соответствующими выражениями для координат x_c, y_c, z_c. Таким образом, в этом случае интегрирование по объему заменится интегрированием по поверхности, и мы будем иметь вместо тройных двойные интегралы.

В частном случае однородного тела имеем $P = \gamma' S$ и $M = \mu' S$. Сокращая γ' и μ', можем тогда наши формулы записать в общем ддя центра тяжести и центра масс виде:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{S}\int_S \boldsymbol{r}\, dS; \qquad x_c = \frac{1}{S}\int_S x\, dS,$$

$$y_c = \frac{1}{S}\int_S y\, dS, \qquad z_c = \frac{1}{S}\int_S z\, dS. \tag{12}$$

Интегралы в этих формулах носят название *статических моментов площади* поверхности. Центр тяжести в этом случае определяется как центр тяжести поверхности.

Наконец, существуют и такие тела, массу которых можно считать распределенной по некоторой линии l (проволока, стержень и т. д.). В этом случае вводим линейные удельный вес γ'' и плотность μ'', так что в качестве элементарных весов и масс можно взять веса и массы линейных элементов $\gamma'' dl$ и $\mu'' dl$. Тогда приходим к формулам

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{P}\int_l \gamma'' \boldsymbol{r}\, dl, \qquad \boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\int_l \mu'' \boldsymbol{r}\, dl.$$

Интегрирование здесь будет только однократное — по длине данной линии. Для однородных тел $P = \gamma'' l$ и $M = \mu'' l$, и после сокращения на γ'' и μ'' получаем:

$$r_c = \frac{1}{l}\int_l r\,dl; \qquad x_c = \frac{1}{l}\int_l x\,dl,$$

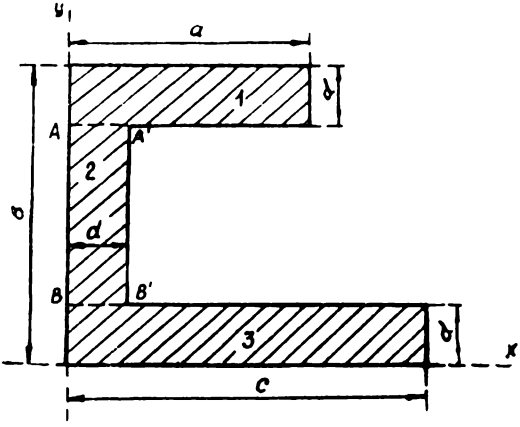
$$y_c = \frac{1}{l}\int_l y\,dl, \qquad z_c = \frac{1}{l}\int_l z\,dl. \tag{13}$$

Таким образом, центр тяжести и центр масс находятся здесь как центр тяжести или центр масс линии. Входящие в (13) интегралы называются *статическими моментами линии* относительно начала координат или соответствующих координатных плоскостей.

3. Методы, облегчающие определение центра тяжести тела. а. *Метод разбиения на части.* В некоторых случаях тело можно разделить на такие части (обычно из геометрических соображений), центры тяжести которых легко определяются. Считая тогда силу веса P_i каждой части приложенной в ее центре тяжести, общий центр тяжести найдем как центр этих параллельных сил тяжести. Если при этом n — число таких частей, то положение общего центра тяжести найдется по форму лам (3) и центра масс — по (6), где x_i, y_i, z_i — координаты центров тяжести отдельных частей. В частном случае однородных тел веса или массы заменяются соответствующими объемами тел, площадями поверхностей или длинами линий.

Пример. Найти положение центра тяжести однородной плоской фигуры, изображенной на чертеже (фиг. 75) и имеющей размеры $a = 8$ *см*, $b = 10$ *см*, $c = 12$ *см*, $d = 2$ *см*.

Сечениями AA' и BB' разбиваем фигуру на три прямоугольника 1, 2, 3, у каждого из которых центр тяжести будет лежать в его геометрическом центре. Снимая размеры с чертежа, легко находим, что координаты центров тяжести прямоугольников в указанных на чертеже осях координат будут:



Фиг. 75.

$$x_1 = \frac{a}{2} = 4\ см, \qquad y_1 = b - \frac{d}{2} = 9\ см,$$

$$x_2 = \frac{d}{2} = 1\ см, \qquad y_2 = \frac{b}{2} = 5\ см,$$

$$x_3 = \frac{c}{2} = 6\ см, \qquad y_3 = \frac{d}{2} = 1\ см.$$

Площади прямоугольников равны соответственно:

$S_1 = ad = 16\ см^2$, $S_2 = (b - 2d)\,d = 12\ см^2$, $S_3 = cd = 24\ см^2$.

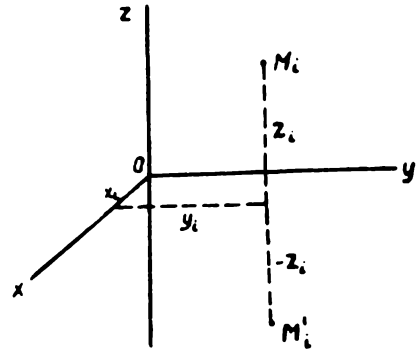
Положение центра тяжести всей фигуры найдется по формулам типа (3) в виде:

$$x_c = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{16 \cdot 4 + 12 \cdot 1 + 24 \cdot 6}{16 + 12 + 24} = \frac{220}{52} = 4\frac{3}{13}\ см.$$

$$y_c = \frac{S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{16 \cdot 9 + 12 \cdot 5 + 24 \cdot 1}{16 + 12 + 24} = \frac{228}{52} = 4\frac{5}{13}\ см.$$

Как видно на этом примере, центр тяжести, являющийся математической точкой, не обязательно совпадает с какой-либо точкой тела.

b. *Метод симметрии.* Легко показать, что если система материальных точек или тело обладает материальной симметрией относительно плоскости, оси или некоторого центра, то центр масс (и центр тяжести) лежит соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.



Фиг. 76.

1. Выбираем оси координат так, чтобы плоскость симметрии оказалась плоскостью (xy) (фиг. 76). Тогда в силу материальной симметрии относительно этой плоскости каждой точке M_i системы с координатами (x_i, y_i, z_i) и массой m_i по другую сторону плоскости будет соответствовать точка M_i', имеющая ту же массу и координаты $(x_i, y_i, -z_i)$. Поэтому статический момент $\sum m_iz_i$ равен нулю, ибо все члены этой суммы попарно обратятся в нуль. Отсюда имеем

$$z_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_iz_i = 0,$$

следовательно, центр масс лежит в плоскости симметрии.

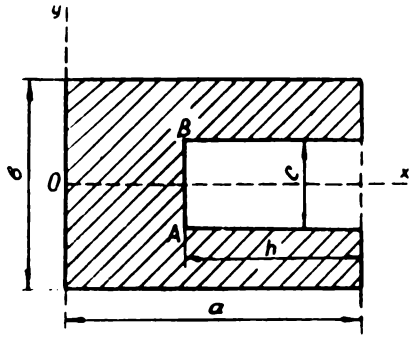
2. В случае оси симметрии принимаем эту ось за ось z. Тогда аналогично предыдущему каждой точке системы с массой m_i и координатами (x_i, y_i, z_i) отвечает точка с такой же массой и координатами $(-x_i, -y_i, z_i)$. Поэтому статические моменты $\sum m_i x_i$ и $\sum m_i y_i$ равны нулю и

$$x_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0, \quad y_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0.$$

Тем самым убеждаемся, что центр масс системы лежит на оси симметрии z.

3. Наконец, при наличии центра симметрии достаточно принять его за начало координат. Тогда каждые две симметричные относительно начала координат точки с одинаковыми массами будут иметь все три координаты с противоположными знаками. Поэтому все три статических момента $\sum m_i x_i$, $\sum m_i y_i$ и $\sum m_i z_i$ окажутся равными нулю, так что будем иметь $x_c = y_c = z_c = 0$, то есть, что центр масс находится в центре симметрии.

с. *Метод отрицательных масс.* Если тело имеет какую-либо выемку или пустоту, то мы можем рассматривать тело состоящим из двух частей — сплошного тела и тела с той же плотностью, заполняющего пустоту и массу которого считаем имеющей отрицательное значение. Таким образом, центр тяжести или центр масс тела найдется по формулам типа (3) и (6) при $n = 2$, в которых только вес, массу, объем, площадь или длину соответствующей части следует считать отрицательной.



Фиг. 77.

Пример. Из прямоугольной однородной доски требуется выпилить прямоугольное отверстие данной ширины c и некоторой длины h (фиг. 77), расположенное симметрично относительно продольной оси x. Какова должна быть длина h, чтобы центр тяжести оставшейся площади оказался на краю AB отверстия?

Так как ось x является осью симметрии фигуры, то центр тяжести лежит на ней и $y_c = 0$.

Из условия задачи вытекает, что

$$x_c = a - h.$$

Применяя метод отрицательных масс, можем записать, что

$$x_c = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2},$$

где $S_1 = ab$ — площадь доски без выреза, а $S_2 = ch$ — площадь выреза. Координаты же x_1 и x_2 находятся из чертежа в виде $x_1 = a/2$, $x_2 = a - h/2$. Подставляя эти значения, находим

$$x_c = \frac{\frac{1}{2}a^2b - ch\left(a - \frac{h}{2}\right)}{ab - ch} = \frac{a^2b - 2ach + ch^2}{2(ab - ch)}.$$

Приравнивая полученные два значения x_c, имеем

$$a - h = \frac{a^2b - 2ach + ch^2}{2(ab - ch)}.$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные, получаем квадратные уравнения для определения h

$$ch^2 - 2abh + a^2b = 0,$$

откуда и получаем решение задачи

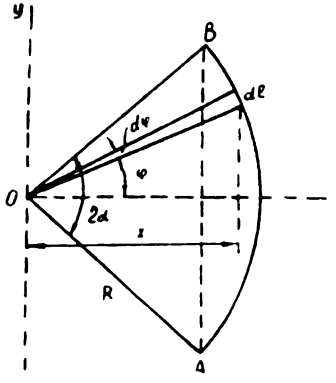
$$h = \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 - a^2bc}}{c} = \frac{a}{c}\left[b - \sqrt{b(b-c)}\right].$$

Знак плюс перед корнем отброшен, ибо $b > c$ и при этом знаке было бы

$$h > a\frac{b}{c} > a,$$

что невозможно.

4. Центры тяжести некоторых линий, площадей и объемов. Для практических целей желательно знать положение центров тяжести часто встречающихся однородных тел в виде некоторых линий, площадей и объемов.



Фиг. 78.

а. *Дуга круга.* Возьмем дугу круга AB радиуса R с центральным углом 2α (фиг. 78). За начало координат примем центр дуги O, ось x проведем перпендикулярно к хорде дуги. Тогда эта ось явится осью симметрии дуги, и центр тяжести будет находиться на этой оси. Поэтому $y_c = 0$, и нам нужно определить только координату

$$x_c = \frac{1}{l}\int_l x\,dl.$$

Из чертежа имеем:

$$x = R\cos\varphi, \quad dl = Rd\varphi, \quad l = 2R\alpha.$$

Подставляя, находим

$$x_c = \frac{R^2}{2R\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\, d\varphi,$$

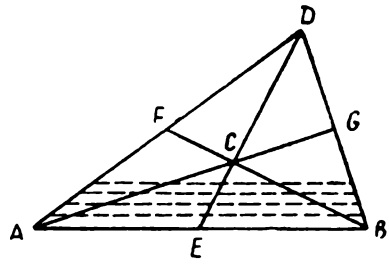
что после интегрирования дает:

$$x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (14)$$

В частном случае полуокружности имеем $\alpha = \pi/2$, $\sin\alpha = 1$ и

$$x_c = \frac{2}{\pi}R \approx \frac{1}{2}R.$$

b. *Площадь треугольника.* Для нахождения центра тяжести площади треугольника ABD (фиг. 79) разбиваем эту площадь на элементарные полоски, параллельные стороне AB. Беря полоски достаточно узкими, можем принять каждую из них за отрезок материальной прямой, у которого в силу однородности полосок центр тяжести окажется лежащим в середине отрезка. Это означает, что силы тяжести всей площади треугольника можно считать распределенными по его медиане DE, на которой поэтому и должен лежать центр тяжести площади треугольника.



Фиг. 79.

Делая разбивку треугольника на полоски параллельно стороне AD, а затем стороне BD и применяя такие же рассуждения, найдем, что центр тяжести площади треугольника должен, в то же время, лежать и на медианах BF и AG. Следовательно, он будет находиться в точке C пересечения всех трех медиан; как известно, эта точка отстоит от каждой вершины треугольника на расстоянии, равном двум третям длины медианы, исходящей из этой вершины.

Центр тяжести площади любого многоугольника можно найти методом разбиения на части, принимая за последние треугольники, на которые можно разбить данный многоугольник.

c. *Площадь кругового сектора.* Пусть мы имеем круговой сектор радиуса R с центральным углом 2α (фиг. 80). Разобьем сектор на равные элементарные секторы, которые можно рассматривать как весьма узкие равнобедренные треугольники с общей вершиной O. Тогда центры тяжести

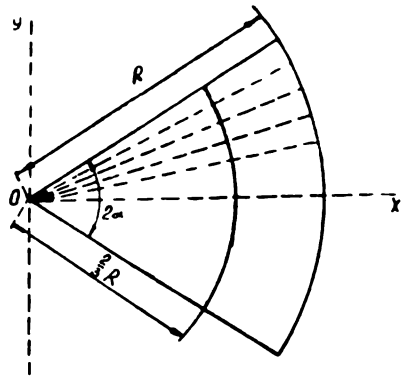
площадей этих треугольников окажутся лежащими на дуге круга радиуса $2/3\,R$, и вес всего сектора можно считать равномерно распределенным по этой дуге. Таким образом, задача свелась к определению центра тяжести дуги круга радиуса $2/3\,R$ с центральным углом 2α. В силу симметрии центр тяжести опять окажется лежащим на оси симметрии Ox; применяя формулу (14), найдем для его координаты

$$x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \tag{15}$$

что и решает задачу.

В частном случае полукруга $\alpha = \pi/2$ и (15) дает:

$$x_c = \frac{4}{3\pi} R < \frac{1}{2} R.$$



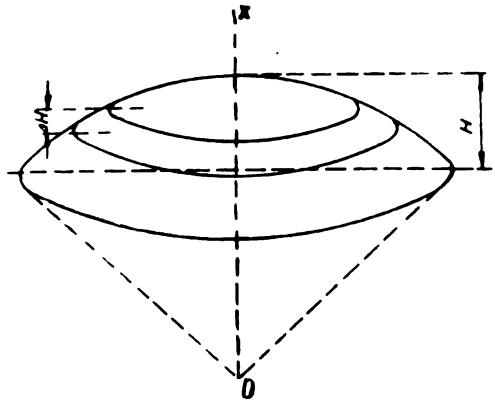
Фиг. 80.

d. *Поверхность сферического сегмента.* Пусть мы имеем сферический сегмент высотою H с центром в точке O (фиг. 81). Ось Ox, перпендикулярная плоскости основания сегмента, явится его осью симметрии, так что центр тяжести поверхности сегмента окажется лежащим на этой оси. Проводя сечения, перпендикулярные оси x, разобьем поверхность сегмента на большое число весьма узких сферических поясов с одинаковыми высотами ΔH. Поверхность каждого такого пояса можно принять за материальную окружность; центр тяжести такой окружности лежит в ее геометрическом центре, то есть на оси x. Так как поверхность сферического пояса равна произведению длины большого круга на высоту пояса, то поверхности всех элементарных поясов одинаковы. Поэтому силы тяжести поверхности сегмента можно считать равномерно распределенными по высоте сегмента, так что искомый центр тяжести лежит в середине этой высоты и имеет координату

$$x_c = R - \frac{1}{2} H, \tag{16}$$

где R — радиус сегмента.

Для частного случая полусферы $H = R$ и $x_c = \frac{1}{2} R$, то есть центр тяжести поверхности полусферы лежит в средней точке радиуса, перпендикулярного основанию.



Фиг. 81.

е. *Объем тела с квадратичным законом для площади поперечного сечения.* Рассмотрим однородное тело, имеющее два плоских параллельных между собой основания с площадями S_0 и S_2 и такую боковую поверхность, что площадь любого поперечного сечения тела, параллельного основаниям, выражается полиномом второго порядка относительно расстояния сечения от одного из оснований. Выбирая оси координат, как указано на чертеже (фиг. 82), то есть, беря плоскость (xy) совпадающей с плоскостью одного из оснований, а ось z — перпендикулярной обоим основаниям, поставим себе задачу об определении координаты z_c центра тяжести объема тела. Для этой координаты имеем по (11):

$$z_c = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} z d\tau,$$

где τ — объем тела. За элемент объема $d\tau$ примем объем, вырезаемый из тела двумя сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$. Тогда, обозначая через S площадь сечения $z = \text{const}$, имеем

$$d\tau = S dz$$

и

$$z_c = \frac{1}{\tau}\int_0^h zS\,dz.$$

В силу условия задачи

$$S = a + bz + cz^2. \tag{17}$$

Подставляя в предыдущее выражение, находим:

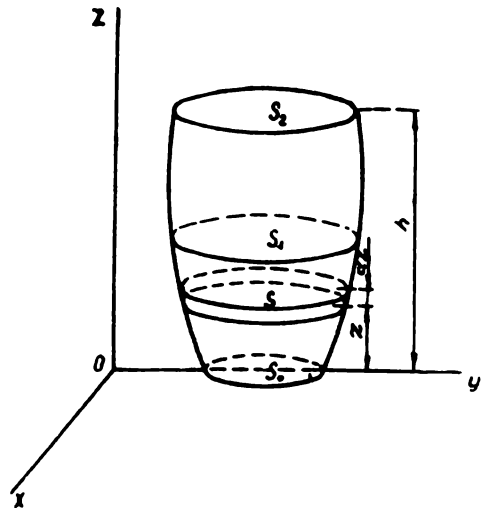
$$z_c = \frac{1}{\tau}\int_0^h z(a + bz + cz^2)\,dz = \frac{1}{\tau}\left(\frac{ah^2}{2} + b\frac{h^3}{3} + c\frac{h^4}{4}\right). \tag{a}$$

Пусть S_1 — площадь среднего сечения тела, параллельного основаниям. Согласно (17), будем иметь:

$$S_0 = a,\ S_1 = a + b\frac{h}{2} + c\frac{h^2}{4},\ S_2 = a + bh + ch^2. \tag{b}$$

Тогда (а) можно переписать в виде

$$z_c = \frac{h^2}{6\tau}\left(3a + 2bh + \frac{3}{2}ch^2\right) = \frac{h^2}{6\tau}(S_2 + 2S_1).$$



Фиг. 82.

Если тело перевернуть, поставив его на плоскость (xy) основанием S_2, то получим для расстояния $h - z_c$ центра тяжести от плоскости основания с площадью S_2 аналогичный результат:

$$h - z_c = \frac{h^2}{6\tau}(S_0 + 2S_1).$$

Производя деление последних двух выражений друг на друга (для исключения неизвестного нам объема τ), находим, что координата z_c определяется равенством

$$\frac{z_c}{h - z_c} = \frac{S_2 + 2S_1}{S_0 + 2S_1},$$

откуда находим

$$z_c = \frac{S_2 + 2S_1}{S_2 + 4S_1 + S_0} h. \qquad (18)$$

Если подставить сюда S_0, S_1 и S_2 по (b), то получим еще другое выражение:

$$z_c = \frac{h}{2}\left[1 + \frac{(b + ch)h}{6a + 3bh + 3ch^2}\right]. \qquad (18')$$

f. *Объемы пирамиды, конуса, сферического сектора.* Легко показать, что если рассмотренное в предыдущем примере тело имеет боковую поверхность в виде многогранника, то для него будет иметь место условие (17). В самом деле, уравнения его ребер можно взять в виде

$$x = \alpha z + \beta, \quad y = \gamma z + \delta, \qquad (a)$$

где α, β, γ, δ — некоторые постоянные, разные для разных ребер. Разбивая многоугольник, получающийся в любом сечении $z = \text{const}$, на треугольники, можем площадь каждого треугольника представить через координаты его вершин x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 как половину абсолютного значения определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Заменяя здесь координаты вершин из уравнений типа (a), найдем, что площадь треугольника представится в виде квадратичной функции от z. А так как площадь сечения есть сумма площадей таких треугольников, то и для нее формула (17) будет выполняться. Следовательно, для координаты z_c будет справедливо выражение (18).

Рассмотрим, например, тело в виде полной пирамиды, основание которой лежит в плоскости $z = 0$. Если вырезать элементарный объем сечениями $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$, то такой элемент можно рассматривать как однородную пластинку в виде некоторого многоугольника, центр тяжести которой находится по формулам (12). Так как во всех

сечениях $z = \text{const}$ получаются подобные многоугольники, то центры тяжести всех элементарных объемов расположатся на прямой, соединяющей вершину пирамиды с центром тяжести основания. Следовательно, на этой прямой будет лежать и центр тяжести всего объема пирамиды. Его точное положение найдется с помощью формулы (18). В этой формуле нужно положить $S_2 = 0$ и учесть, что пирамида, отсекаемая сечением $z = h/2$, подобна заданной. Отношение же площадей S_0 и S_1 равно квадрату отношения подобия, то есть

$$\frac{S_0}{S_1} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2,$$

где h' — высота отсеченной пирамиды. А так как $h' = h/2$, то отсюда имеем

$$S_0 = 4S_1.$$

Таким образом, из (18) находим

$$z_c = \frac{2S_1}{8S_1} h = \frac{1}{4} h.$$

В силу подобия отсюда вытекает, что центр тяжести объема пирамиды будет лежать на прямой, соединяющей вершину пирамиды с центром тяжести основания, отстоя от этого центра на одну четверть длины указанной прямой.

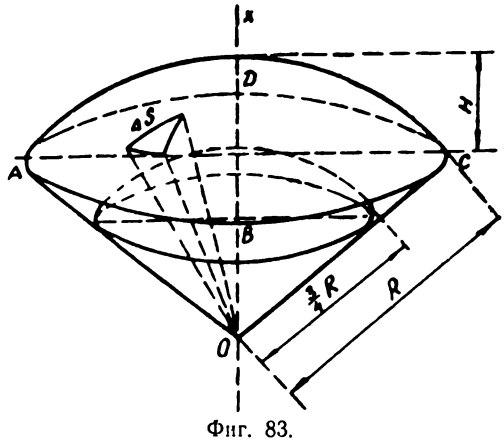
В частности, центр тяжести правильной пирамиды окажется лежащим на одной четверти ее высоты, считая от основания. То же будет справедливо и для кругового конуса, как являющегося пределом правильных вписанных пирамид.

Пусть мы имеем сферический сектор $OABCD$, вырезанный из сферы радиуса R (фиг. 83). Разобьем его на равновеликие элементарные пирамиды с общей вершиной в центре сферы и с одинаковыми площадями оснований ΔS, лежащими на поверхности сегмента. Тогда центры тяжести этих пирамид окажутся лежащими, по предыдущему, на поверхности сегмента радиуса $3/4\,R$. Так как пирамиды имеют одинаковые объемы, то силы тяжести всего сектора можно считать равномерно распределенными по поверхности этого сегмента. Поэтому центр тяжести заданного сектора будет лежать на половине высоты сегмента, равной $3/4\,H$, если H — высота сегмента данного сектора. Таким образом, центр тяжести объема сектора будет иметь координату

$$x_c = \frac{3}{4} R - \frac{1}{2}\frac{3}{4} H = \frac{3}{4}\left(R - \frac{1}{2} H\right).$$

В частном случае полусферы $H = R$, и координата центра тяжести ее объема есть

$$x_c = \frac{3}{8} R. \tag{19}$$



Фиг. 83.

5. Теоремы Гюльдена. *Теорема 1: Площадь части поверхности вращения, полученной поворотом на некоторый угол отрезка плоской кривой или ломаной вокруг оси, лежащей в ее плоскости и ее не пересекающей, равна длине этого отрезка, умноженной на длину пути, пройденного при этом повороте центром масс отрезка.*

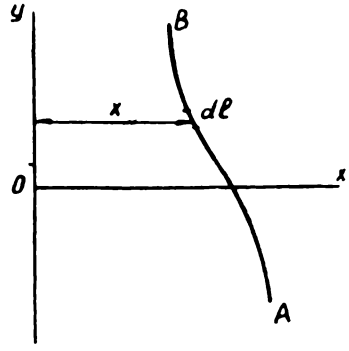
Отрезок AB плоской кривой, лежащей в плоскости (xy) и имеющей длину l (фиг. 84), повернем на некоторый угол φ вокруг оси y. Тогда каждый элемент dl кривой опишет поверхность с площадью $\varphi x dl$, величина же поверхности, описанной всем отрезком, будет

$$S = \varphi \int_0^l x dl,$$

что согласно (13) запишется иначе в виде

$$S = \varphi x_c l,$$

где φx_c как раз равно пути, пройденному при этом повороте центром масс кривой



Фиг. 84.

Полная поверхность вращения получится при повороте отрезка на угол 2π, поэтому ее площадь определится формулой

$$S = 2\pi x_c l. \tag{20}$$

Теорема 2. *Объем части тела вращения, полученного поворотом плоской фигуры на некоторый угол вокруг оси, лежащей в ее плоскости и ее не пересекающей, равен площади этой фигуры, умноженной на длину пути, пройденного при этом повороте центром масс фигуры.*

Возьмем плоскую фигуру, лежащую в плоскости (xy) и имеющую площадь S (фиг. 85). Повернем эту фигуру вокруг оси y на некоторый угол φ. При этом повороте каждая элементарная площадка dS фигуры образует тело с объемом $\varphi x dS$, а объем тела, образованного всей фигурой, окажется равным

$$\tau = \varphi \int_S x dS,$$

что по (12) можно записать в виде

$$\tau = \varphi x_c S.$$

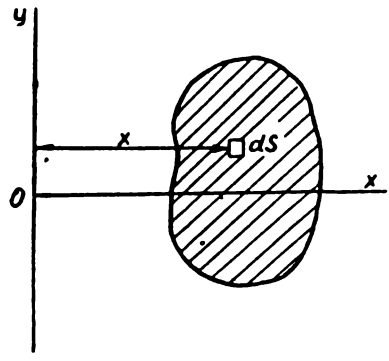
Здесь x_c есть координата центра масс площади фигуры, φx_c — путь, пройденный этим центром при повороте. Тем самым теорема доказана.

В частности, объем поверхности вращения, получающейся при полном обороте фигуры вокруг оси y, будет равен

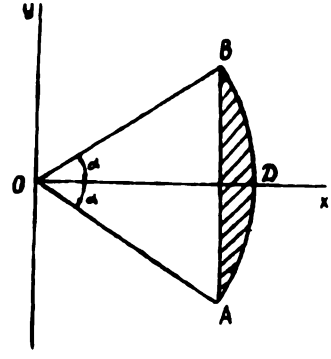
$$\tau = 2\pi x_c S. \qquad (21)$$

Формулы (20) и (21) могут быть использованы также для определения центра масс отрезка кривой или площади плоской фигуры, если будут известны все остальные входящие в эти формулы величины.

Пример. Определить площадь поверхности вращения, полученной вращением вокруг оси y дуги окружности ADB (фиг. 86), а также найти



Фиг. 85.



Фиг. 86.

объем тела, образованного при этом вращении заштрихованным сегментом.

Для площади поверхности по (20) имеем

$$S = 2\pi x_c l.$$

Координата x_c центра масс дуги есть

$$x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

а длина дуги

$$l = 2R\alpha.$$

Подставляя в (20), находим

$$S = 4\pi R^2 \sin\alpha.$$

Для решения второй части задачи необходимо сначала найти положение центра масс сегмента. Применяя метод отрицательных масс, имеем

$$x_c = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2}, \qquad \text{(а)}$$

где S_1 и x_1 — площадь и координата центра масс кругового сектора $OADB$, а S_2 и x_2 — те же величины для треугольника OAB. Как известно,

$$x_1 = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad x_2 = \frac{2}{3}R\cos\alpha,$$

$$S_1 = R^2\alpha, \quad S_2 = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha \cdot R\cos\alpha = R^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Поэтому, по (а), имеем

$$x_c = \frac{\frac{2}{3}R^3\sin\alpha - \frac{2}{3}R^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{R^2\alpha - R^2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{3}R\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

Площадь S сегмента будет

$$S = S_1 - S_2 = R^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha).$$

Тогда по (21) находим объем тела вращения:

$$V = 2\pi x_c S = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^3\alpha.$$

Г. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Глава 1

ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 21. Дифференциальные уравнения движения и две задачи динамики

1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Будем сначала рассматривать движение *свободной* материальной точки, то есть находящейся под действием только активных сил. Для этого движения будет справедлив основной закон динамики

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}, \tag{1}$$

где m — масса точки, $\boldsymbol{w}$ — ее ускорение, $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на точку, а в случае действия нескольких сил — равнодействующая этих сил.

Берем оси декартовых координат, связанные с тем телом отсчета, которое принимается за неподвижное и относительно которого справедливо уравнение (1). Проектируя (1) на эти оси, находим

$$m\ddot{x} = X,\ m\ddot{y} = Y,\ m\ddot{z} = Z. \tag{2}$$

Здесь X, Y, Z — проекции силы $\boldsymbol{F}$. Эти уравнения называются *основными дифференциальными уравнениями движения материальной точки.*

Иногда более удобными оказываются дифференциальные уравнения движения, записанные в проекциях на оси каких-либо криволинейных координат. Так, например, если взять цилиндрическую систему координат r, φ, z, то проекции ускорения на оси этой системы имеют, как известно из кинематики, вид

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,\ w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi},\ w_z = \ddot{z}.$$

Поэтому дифференциальные уравнения движения точки в этой системе будут

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= F_\varphi, \\ m\ddot{z} &= F_z, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где F_r, F_φ, F_z — проекции силы на оси (r), (φ), (z) цилиндрической системы координат.

Очевидно, что в плоском движении точки первые два уравнения (3) являются дифференциальными уравнениями движения точки в проекциях на оси полярной системы координат, взятой в плоскости движения.

2. Основная задача динамики. Если для материальной точки с данной массой m известен закон движения точки, например в декартовых координатах

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \qquad (4)$$

то, дифференцируя дважды по времени формулы (4) и подставляя полученные выражения $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, и $\ddot{z}$ в уравнения (2), найдем проекции силы X, Y, Z, что и позволит определить как величину, так и направление силы. Следовательно, такая задача решается очень просто.

Иначе обстоит дело с обратной задачей, когда по заданной силе, то есть при известных X, Y, Z, требуется найти закон движения точки, ибо приложенная к точке сила может быть достаточно сложной функцией некоторых аргументов.

Так, сила может зависеть от времени t. Распространенным примером таких сил в механике являются силы, меняющиеся со временем по какому-либо периодическому закону. Точно также, если мощность источника поля электрических или магнитных сил будет переменной, то сила поля, действующая в данной точке пространства на заряженную частицу, тоже окажется функцией времени.

Существуют силы, величина и направление которых зависят от положения точки в пространстве, то есть от радиуса-вектора точки или ее координат. Такими силами являются, например, упомянутые электрические или магнитные силы, силы всемирного тяготения, зависящие от расстояния до центра притяжения, а также некоторые другие.

Наконец, если материальная точка движется в какой-либо среде (в воде, воздухе и т. д.), то на точку будет действовать сила сопротивления среды, зависящая от скорости точки.

В классической механике ограничиваются случаем зависимости только от этих аргументов. Таким образом, стоящие в правых частях уравнений (2) проекции силы могут зависеть от координат x, y, z точки, их первых производных $\dot{x}$,

y, z и времени t, так что уравнения (2) часто оказываются достаточно сложной системой совокупных дифференциальных уравнений второго порядка относительно искомых функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Как видим, задача об определении закона движения точки по заданной силе сводится к задаче о разыскании общего решения системы дифференциальных уравнений движения. Эта трудная в общем случае задача и является основной задачей динамики, и содержание динамики состоит главным образом в установлении методов, позволяющих решить задачу об интегрировании указанных уравнений для различных частных случаев задания силы.

3. Общий интеграл дифференциальных уравнений движения. Первые интегралы. Как известно, общий интеграл одного дифференциального уравнения второго порядка, если исключить особые случаи*), не встречающиеся в механике, выражает искомую функцию через независимую переменную и две произвольных постоянных. В нашем случае системы трех таких дифференциальных уравнений появится шесть произвольных постоянных, так что общий интеграл системы (2) будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

Общий интеграл определяет бесконечное множество решений, отвечающих всевозможным значениям постоянных. Движение может стать определенным только в том случае, если будут заданы шесть каких-либо условий, позволяющих определить все постоянные. С этой целью обычно задают положение и скорость точки в какой-либо момент времени t_0, то есть задают значения координат x_0, y_0, z_0 и их первых производных $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ при $t = t_0$. Не нарушая общности рассуждений, можем этот момент принять за начало отсчета времени, полагая $t_0 = 0$. Эти шесть условий принято называть *начальными условиями*.

Подставляя начальные условия в (5) и в три выражения для $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, образованные путем дифференцирования по времени формул (5), получим x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, выраженные в функции от t_0 и всех шести постоянных. Решая эти уравнения относительно постоянных, мы и найдем их значения.

*) Такой особый случай дифференциального уравнения первого порядка рассмотрен, например, в статье М. А. Лаврентьева, опубликованной в журнале Mathematische Zeitschrift, 1925, Bd 23.

Отсюда мы можем сделать важный вывод о том, что *движение материальной точки определяется не только приложенной к ней силой, но и начальными условиями движения.*

Рассмотренная задача о выделении из общего решения (5) частного решения дифференциальных уравнений движения точки, удовлетворяющего заданным начальным условиям, носит название задачи Коши. Как известно, для этой задачи существует единственное решение, если стоящие в правых частях уравнений (2) функции X, Y, Z являются непрерывными дифференцируемыми функциями своих аргументов. Это условие можно считать выполняющимся во всех реальных явлениях материального мира. Если поэтому будет найдено какое-либо решение задачи Коши для уравнений (2), то тем самым будет определено единственно возможное движение материальной точки.

Может случиться, что в уравнениях (2) проекции силы зависят только от данной координаты и ее производной, то есть

$$X = X(x, \dot{x}, t),\quad Y = Y(y, \dot{y}, t),\quad Z = Z(z, \dot{z}, t).$$

Тогда система (2) распадется на три независимых между собой уравнения, и их общий интеграл будет иметь вид:

$$x = x(t, C_1, C_2),\quad y = y(t, C_3, C_4),\quad z = z(t, C_5, C_6). \qquad (6)$$

В ходе интегрирования системы (2) возможно получение промежуточной зависимости между координатами и их первыми производными, включающей в себя одну произвольную постоянную, то есть зависимости вида

$$\Phi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, C) = 0$$

или вида

$$\Phi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C.$$

Всякая такая зависимость, выполняющаяся при любых начальных условиях, называется *первым интегралом* уравнений движения.

Если формулы (5) и получающиеся из них дифференцированием по t выражения для $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ разрешить относительно произвольных постоянных, то получим шесть первых интегралов уравнений движения

$$\Phi_\kappa(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, 6).$$

Наоборот, если известны шесть независимых первых интегралов, то, исключая из них $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, можем составить общий интеграл (5) дифференциальных уравнений движения.

Пример. Рассмотрим движение тяжелой материальной точки. Направляя ось y вертикально вверх, получим для проекций силы тяжести:

$$X = 0,\ Y = -mg,\ Z = 0.$$

Подставляя эти выражения в систему (2) и сокращая массу m, приведем дифференциальные уравнения задачи к виду:

$$\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = -g,\ \ddot{z} = 0.$$

Уравнения независимы между собой, так что общий интеграл будет иметь вид (6). Однократным интегрированием непосредственно получаем:

$$\dot{x} = C_1,\ \dot{y} = -gt + C_3,\ \dot{z} = C_5. \qquad (a)$$

Интегрируя еще раз, имеем общий интеграл:

$$x = C_1 t + C_2,\quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4,\ z = C_5 t + C_6. \qquad (b)$$

Покажем теперь на этом примере зависимость движения точки от выбора начальных условий. С этой целью рассмотрим два частных случая.

1. Точка брошена вертикально вверх со скоростью v_0. Если начало координат взять в начальном положении точки, то начальные условия движения будут:

$$\text{при } t = 0 \qquad x = y = z = 0,$$

$$\dot{x} = 0,\ \dot{y} = v_0,\ \dot{z} = 0.$$

Подставляя эти данные в интегралы (a) и (b), находим:

$$C_1 = 0,\ C_3 = v_0,\ C_5 = 0,\ C_2 = C_4 = C_6 = 0.$$

Подстановка полученных значений постоянных в общий интеграл (b) дает закон движения точки:

$$x = 0,\ y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t,\ z = 0.$$

Первое и третье уравнения дают траекторию движения, которой здесь оказывается вертикальная ось y, а второе уравнение дает закон движения точки по этой прямой. Движение точки оказывается прямолинейным и при том равномерно замедленным.

Максимальная высота, на которую поднимется точка, найдется из того условия, что на ней скорость точки обратится в нуль. Поэтому это произойдет в момент времени $t = t_1$, для которого

$$\dot{y}_{t=t_1} = -gt_1 + v_0 = 0,$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0}{g}.$$

Следовательно, высота подъема есть

$$y_1 = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

2. Точка брошена со скоростью v_0 под углом α к горизонту (фиг. 87). Горизонтальную ось x возьмем в вертикальной плоскости, проходящей через ось y и вектор v_0. Тогда начальные условия будут:

$$\text{при } t = 0 \qquad x = y = z = 0,$$

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha,\ \dot{y} = v_0 \sin\alpha,\ \dot{z} = 0.$$

Подставляя эти условия в (a) и (b), найдем:

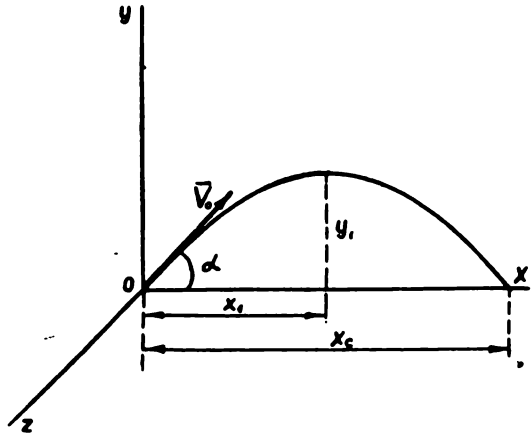
$$C_1 = v_0 \cos\alpha,\ C_3 = v_0 \sin\alpha,\ C_5 = 0,$$

$$C_2 = C_4 = C_6 = 0.$$

Поэтому закон движения точки примет вид:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t, \quad z = 0.$$

Отсюда видно, что точка будет двигаться по плоской траектории, лежащей в вертикальной плоскости (xy). Уравнение этой траектории



Фиг. 87.

найдется исключением t из первых двух уравнений. Для этого, подставляя получаемое из первого уравнения выражение

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

во второе, получим

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Как видим, траектория точки будет параболой. Так как

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2\alpha},$$

то угол наклона касательной к оси x монотонно убывает с ростом x, и парабола обращена выпуклостью вверх. В наивысшей точке траектории

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

что дает для абсциссы этой точки

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}.$$

Горизонтальная дальность полета x_c найдется как абсцисса второй точки пересечения параболы с осью x из уравнения $y = 0$, то есть из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx_c}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0.$$

Отсюда

$$x_c = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Видим, что $x_c = 2x_1$, так что прямая $x = x_1$ является осью параболы. Подставляя значение x_1 в уравнение параболы, находим, что максимальная высота подъема точки будет

$$y_1 = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

Рассмотренные два случая показывают, что характер движения точки существенным образом зависит от начальных условий движения.

§ 22. Общие теоремы динамики

1. Теорема о количестве движения. Существует три теоремы, называемые общими теоремами динамики, позволяющие в частных случаях легко находить первые интегралы дифференциальных уравнений движения материальной точки. Этими теоремами являются теорема о количестве движения, теорема о моменте количества движения и теорема кинетической энергии. Рассмотрим первую из них.

Предварительно дадим некоторые определения.

Количеством движения материальной точки называется вектор $m\boldsymbol{v}$, равный произведению массы точки на вектор ее скорости. Очевидно, что этот вектор направлен по вектору скорости точки, а его проекциями на оси координат являются величины $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$.

Импульсом постоянной силы $\boldsymbol{F}$ за какой-либо промежуток времени $t - t_0$ называется вектор $\boldsymbol{F}(t - t_0)$, равный произведению вектора силы на этот промежуток. Это определение импульса можно распространить и на переменную силу, если рассматривать элементарный промежуток времени dt, то есть такой, в течение которого изменением силы можно пренебречь. Получающееся произведение $\boldsymbol{F}\,dt$ называется *элементарным импульсом* силы. Сумма всех элементарных импульсов за промежуток времени $t - t_0$, то есть вектор

$$\boldsymbol{S} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\,dt \qquad (1)$$

называется импульсом силы $\boldsymbol{F}$ за этот промежуток.

Возьмем общее уравнение динамики в виде:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}.$$

Умножая это уравнение на dt и внося массу, как постоянную, под знак дифференциала, находим

$$d(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}\,dt. \tag{2}$$

Это равенство и выражает теорему о количестве движения точки в элементарной форме: *дифференциал количества движения равен элементарному импульсу силы.*

Пусть в момент времени t_0 точка имеет скорость $\boldsymbol{v}_0$, а в какой-нибудь другой момент t—скорость $\boldsymbol{v}$. Интегрируя равенство (2) в пределах от t_0 до t, получаем

$$m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{S}. \tag{3}$$

Получили теорему о количестве движения в конечной форме:

Изменение количества движения материальной точки за какой-либо промежуток времени равно импульсу силы за тот же промежуток.

В проекциях на оси декартовых координат теорема имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} m\dot{x} - m\dot{x}_0 &= S_x, \\ m\dot{y} - m\dot{y}_0 &= S_y, \\ m\dot{z} - m\dot{z}_0 &= S_z, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где согласно (1) правые части являются проекциями импульса силы

$$S_x = \int_{t_0}^{t} X\,dt, \quad S_y = \int_{t_0}^{t} Y\,dt, \quad S_z = \int_{t_0}^{t} Z\,dt.$$

Если $\boldsymbol{F} = 0$, то из (2) имеем $d\boldsymbol{v} = 0$, что дает векторный интеграл

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}.$$

В проекциях на оси координат получаем три первых интеграла

$$\dot{x} = c_1, \quad \dot{y} = c_2, \quad \dot{z} = c_3.$$

Эти интегралы, как и предыдущий, говорят о том, что в данном случае точка будет двигаться по закону инерции.

Если равняется нулю не сам вектор силы, а только какая-либо его проекция, например $X = 0$, то имеем $S_x = 0$ и тогда, согласно первому уравнению (4), получим только один первый интеграл

$$\dot{x} = c_1.$$

Пример. Снаряд весом $q = 6$ *кГ* движется по каналу орудия, имеющего калибр $d = 75$ *мм*, под действием давления газов p, изменяющегося по указанному на фиг. 88 закону. При этом $t_c = 2t_m = 0{,}01$ *сек* есть

момент времени, отвечающий вылету снаряда из канала, а максимальное давление $p_m = 2500$ *кГ/см*^{2}. Найти скорость вылета снаряда.

Теорема о количестве движения для рассматриваемого прямолинейного движения может быть записана в виде

$$mv - mv_0 = \int_0^{t_c} P\,dt, \qquad \text{(а)}$$

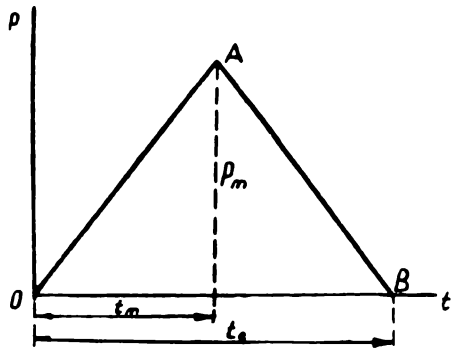
где

$$P = \frac{\pi d^2}{4} p$$

есть сила, действующая на снаряд в данный момент времени.

Движение снаряда начинается с нулевой начальной скоростью, так что $v_0 = 0$. Подставляя выражение для P и значение массы $m = q/g$ в (а), находим, что

$$v = \frac{g}{q}\frac{\pi d^2}{4}\int_0^{t_c} p\,dt.$$



Фиг. 88.

Импульс давления, стоящий в правой части, по свойствам определенного интеграла равен площади треугольника OAB (фиг. 88), следовательно,

$$\int_0^{t_c} p\,dt = \frac{1}{2} t_c p_m.$$

Окончательно получаем:

$$v = \frac{\pi}{8}\frac{gd^2}{q} t_c p_m.$$

Выражая длины в сантиметрах, находим

$$v = \frac{3{,}14 \cdot 981 \cdot (7{,}5)^2 \cdot 0{,}01 \cdot 2500}{8 \cdot 6} \approx 90300 \text{ см/сек} = 903 \text{ м/сек}.$$

2. Теорема о моменте количества движения. Теорема площадей. Умножим обе части основного уравнения динамики

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

векторно слева на радиус-вектор точки $\boldsymbol{r}$. В полученном уравнении

$$\boldsymbol{r} \times m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

преобразуем левую часть:

$$\boldsymbol{r} \times m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) - \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v}\right).$$

Но $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ и второй член правой части равен нулю как векторное произведение коллинеарных векторов. Поэтому предыдущее уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{5}$$

Это равенство и представляет собой теорему о моменте количества движения:

Производная по времени от момента количества движения материальной точки, взятого относительно какого-либо центра, равна моменту силы относительно того же центра.

В подробной записи в проекциях на оси координат, с началом в центре моментов, теорема дает три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) &= yZ - zY = L_x, \\ m\frac{d}{dt}(z\dot{x} - x\dot{z}) &= zX - xZ = L_y, \\ m\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) &= xY - yX = L_z. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь, как и в статике, через L_x, L_y, L_z обозначены моменты силы относительно координатных осей.

Момент количества движения материальной точки часто называют *кинетическим моментом* точки.

Уравнению (5) можно дать геометрическое истолкование, носящее название *интерпретации Резаля*. Именно если построить годограф кинетического момента, то левая часть уравнения представляет собой скорость точки, описывающей годограф. Поэтому уравнение (5) говорит о том, что эта скорость равна моменту силы, так что последний направлен по касательной к годографу кинетического момента в соответствующую сторону (фиг. 89).

Как мы знаем (§ 6, п. 5), момент скорости относительно какого-либо центра равен удвоенной секториальной скорости относительно того же центра:

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = 2\frac{d\sigma}{dt}.$$

Следовательно, уравнение теоремы моментов можно записать еще в виде

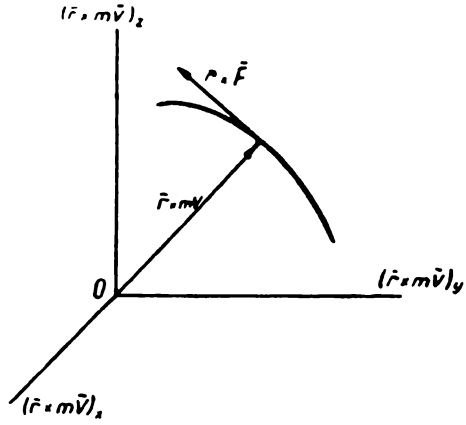
$$2m\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \tag{7}$$

где $d^2\sigma/dt^2$ является секториальным ускорением.

Рассмотрим частный случай, когда момент силы равен нулю. Равенство

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$$

при $\boldsymbol{r}$, отличном от нуля, возможно лишь в двух случаях: 1) сила $\boldsymbol{F} = 0$, 2) сила $\boldsymbol{F}$ имеет общую линию действия с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$. В первом случае точка движется по закону инерции, и этот случай, как уже известный, рассматривать не будем. Во втором случае, в силу коллинеарности векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{r}$, линия действия силы во все время



Фиг. 89.

движения будет проходить через одну и ту же точку — центр момента. Поэтому такая сила называется *центральной силой*. Если центральная сила направлена по радиусу-вектору, то есть от центра, то она будет силой отталкивания, если же к центру, то есть противоположно радиусу-вектору, то она явится силой притяжения.

Для центральной силы уравнение (5) после сокращения на m принимает вид:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = 0,$$

откуда получаем векторный интеграл

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}. \tag{8}$$

Проектируя (8) на оси координат, находим три первых интеграла

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

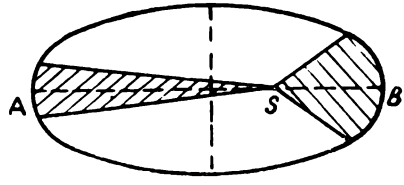
Эти интегралы носят название *интегралов площадей*, ибо стоящие в левых частях выражения представляют собой удвоенные секториальные скорости проекций точки в соответствующих координатных плоскостях.

Если момент силы относительно начала координат отличен от нуля, а равен нулю ее момент относительно какой-либо оси, например $L_x = 0$, то, согласно первому уравнению (6), будем иметь один первый интеграл

$$yz - zy = c_1.$$

Интегралу (8) можно дать формулировку, носящую название *теоремы площадей*. Постоянство направления вектора $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ говорит о том, что плоскость этих векторов неизменна в пространстве; следовательно, точка будет двигаться по траектории, лежащей в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору момента количества движения точки. Постоянство же величины вектора $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ говорит о постоянстве величины секториальной скорости. Поэтому теорема площадей состоит в том, что *под действием центральной силы материальная точка движется по плоской траектории, а ее радиус-вектор в равные промежутки времени описывает равные площади.*

Эта важная теорема находит применение всюду, где дело идет о центральных силах. В частности, она имеет большое значение для небесной механики. Так, движение планет вокруг солнца, если не учитывать влияние других планет, оказывается подчиненным этой теореме, ибо все планеты находятся под действием центральной силы притяжения их солнцем. В силу данной теоремы каждая планета движется вокруг солнца по плоской орбите. Как установил еще Кеплер, эта орбита есть эллипс, в одном из фокусов которого находится солнце S (фиг. 90). Более удаленная вершина A большой оси орбиты называется афелием, а более близкая вершина B — перигелием. Тогда, согласно второй части теоремы, радиус-вектор планеты за один и тот же промежуток времени будет описывать одинаковые площади как в окрестности афелия, так и в окрестности перигелия. Из равенства этих заштрихованных на фиг. 90 площадей вытекает, что дуга орбиты, описываемая точкой за один и тот же промежуток времени, будет наименьшей в окрестности афелия и наибольшей — в окрестности перигелия. Поэтому и скорость движения планеты по ее



Фиг. 90.

орбите будет наименьшей в афелии и наибольшей — в перигелии.

Из кинематики известно, что если при плоском движении положение точки определять полярными координатами r, φ, то секториальная скорость точки есть

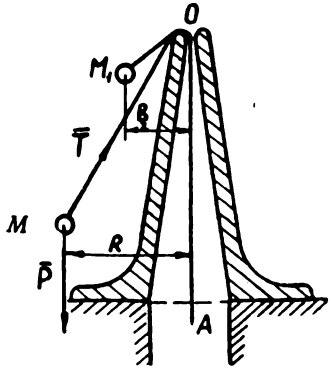
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}.$$

Отсюда следует, что постоянство секториальной скорости точки при действии на нее центральной силы может быть записано также в виде

$$r^2 \dot{\varphi} = c. \qquad (10)$$

Этот интеграл тоже называется интегралом площадей, а постоянная интегрирования c — постоянной площадей. Заметим, что если оси x и y взять в плоскости движения точки, то из трех интегралов (9) первые два обратятся в тождества $0 \equiv 0$, и останется только один третий, который окажется эквивалентным интегралу (10).

Если действующая на точку сила не центральная, но ее момент относительно какой-либо оси равен нулю, то постоянной окажется секториальная скорость проекции точки в плоскости, перпендикулярной оси. Следовательно, если r, φ — полярные координаты этой проекции, то единственный для этого случая интеграл площадей тоже можно записать в форме (10).



Фиг. 91.

Пример. Тяжелая гирька M (фиг. 91) привязана к концу нерастяжимой нити, часть которой OA пропущена через вертикальную трубку. Гирька вращается вокруг оси трубки по окружности радиуса R, делая $n = 120$ *об/мин*. Медленно втягивая нить в трубку, укорачивают наружную часть нити до длины OM_1, при которой гирька описывает окружность радиуса $R/2$. Найти число оборотов гирьки по этой окружности.

В любом положении гирька находится под действием силы тяжести P и реакции нити T. Момент каждой из этих сил относительно оси трубки равен нулю, ибо первая параллельна оси, а линия действия второй пересекает эту ось; поэтому равен нулю и общий момент обеих сил относительно оси трубки. Следовательно, в обоих случаях радиус-вектор гирьки в перпендикулярной к оси плоскости в равные промежутки времени будет описывать равные площади.

В первом положении указанная площадь за одну минуту будет равна

$$n \cdot \pi R^2,$$

а во втором —

$$n_1 \cdot \pi \frac{R^2}{4},$$

где n_1 — искомое число оборотов в верхнем положении гирьки. Из равенства этих площадей находим

$$n_1 = 4n = 480 \text{ об/мин}.$$

3. Работа силы. Если материальная точка движется по прямой, то работой приложенной к ней постоянной силы F, действующей вдоль той же прямой, на перемещении s точки называется произведение

$$A = \pm Fs,$$

где знак плюс берется тогда, когда перемещение направлено по силе, и знак минус — когда перемещение противоположно силе. Если же постоянная сила составляет некоторый угол φ с направлением перемещения, то ее работой на пути s называется работа ее проекции на направление перемещения, то есть величина

$$A = Fs\cos\varphi.$$

Если перемещение точки рассматривать как вектор $\boldsymbol{s}$, то для обоих случаев работа может быть выражена скалярным произведением векторов

$$A = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

Эту формулу мы можем распространить и на случай любого криволинейного пути точки, находящейся под действием какой угодно переменной силы, если будем рассматривать элементарное перемещение $d\boldsymbol{r}$ точки. Таким образом, элементарной работой силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении $d\boldsymbol{r}$ называется скалярное произведение

$$d'A = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}. \qquad (11)$$

Символ d' говорит здесь о том, что, как будет видно из дальнейшего, элементарная работа силы не всегда будет полным дифференциалом какой-либо функции.

Раскрывая скалярное произведение, можно получить другие выражения элементарной работы. Так, если φ — угол, составленный силой с направлением перемещения $d\boldsymbol{r}$, то есть с ортом касательной к траектории $\boldsymbol{\tau}$, направленным в сторону движения точки, то формула (11) может быть переписана в одном из следующих видов:

$$d'A = F\cos\varphi\cdot ds = F_\tau ds, \qquad (11')$$

где $ds = |d\boldsymbol{r}|$ — модуль элементарного перемещения точки, $F_\tau = F\cos\varphi$ — проекция силы на направление этого перемещения.

Если dx, dy, dz — проекции на оси координат элементарного перемещения $d\boldsymbol{r}$, то можем еще элементарную работу записать в форме

$$d'A = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \qquad (11'')$$

При действии на точку нескольких сил $\boldsymbol{F}_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ подставим в выражение работы их равнодействующей $d'A = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ значение

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i;$$

тогда найдем

$$d'A = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r},$$

то есть элементарная работа равнодействующей равна сумме элементарных работ составляющих на том же перемещении.

Пусть начальное положение точки определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_0$, а конечное — радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$. Работой силы на конечном перемещении точки из первого положения во второе называется сумма всех элементарных работ на этом перемещении, то есть криволинейный интеграл

$$A = \int_{(\boldsymbol{r}_0)}^{(\boldsymbol{r})} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}, \qquad (12)$$

взятый вдоль пути точки. Как известно, в общем случае криволинейный интеграл определяется не только пределами интегрирования, но также и видом кривой, вдоль которой он берется. Поэтому работа силы A может зависеть не только от верхнего предела интегрирования, но также и от вида траектории точки между ее крайними положениями.

Вычисление работы по формуле (12) можно делать в зависимости от характера действующей на точку силы. Так, если сила зависит, помимо других аргументов, явно от времени t, то, полагая $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$, представляем работу в виде

$$A = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,dt = \int_{t_0}^{t} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})\,dt, \qquad (13)$$

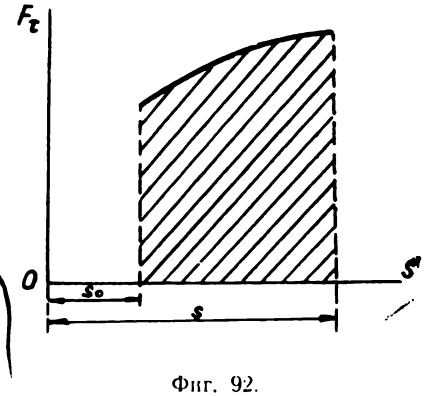
где t_0 и t — моменты времени, отвечающие начальному и конечному положениям точки. Для определения работы по этой формуле необходимо еще знать закон движения точки, то есть знать ее координаты в функции от времени. Это позволит тогда представить подинтегральное выражение в виде некоторой известной функции $f(t)$, и работа окажется равной

$$A = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt.$$

Если сила известна по величине и направлению как функция длины дуги s, отсчитываемой вдоль траектории точки, то, выражая элементарную работу по (11′), можем вычислить работу по формуле

$$A = \int_{s_0}^{s} F_\tau(s)\,ds, \qquad (14)$$

где s_0 и s — значения дуговой координаты s в начале и конце пути соответственно. Если известна хотя бы графическая зависимость $F_\tau(s)$ (фиг. 92), то работа будет измеряться величиной заштрихованной площади, заключенной между графиком этой функции, осью абсцисс и крайними ординатами, отвечающими пределам интегрирования s_0 и s. Такой способ определения работы имеет большое практическое значение, позволяя по графической записи функции $F_\tau(s)$, сделанной каким-либо прибором, найти работу силы.



Фиг. 92.

Когда сила зависит только от положения точки, то есть является функцией координат x, y, z точки, то область пространства, в которой это имеет место, называется *силовым полем*. В общем случае произвольного вектора область пространства, в которой данный вектор является однозначной функцией, называется *векторным полем*. Таким векторным полем в данном случае будет поле сил. Если вектор не зависит явно от времени, то его поле называется *стационарным*, в противном случае — *нестационарным*.

Имея стационарное силовое поле, мы берем элементарную работу в форме (11″). Тогда работа на конечном перемещении точки окажется равной

$$A = \int_{(r_0)}^{(r)} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz), \qquad (15)$$

где X, Y, Z будут зависеть только от координат. Производя вычисление этого интеграла, мы найдем работу силы на данном перемещении.

В частности, если уравнения траектории точки заданы в параметрической форме, так что координаты будут функциями некоторого параметра q, то выражение (15) можно представить в форме

$$A = \int_{q_0}^{q} \left\{ X(q) \frac{dx}{dq} + Y(q) \frac{dy}{dq} + Z(q) \frac{dz}{dq} \right\} dq, \qquad (16)$$

где q_0 и q — значения параметра, отвечающие конечным точкам пути. Из этого выражения хорошо видна зависимость работы от вида проходимого точкой пути, ибо для разных траекторий мы будем иметь различные функции x, y, z от q.

В случае нестационарного силового поля вычисление работы опять сведется к формуле (13) в соответствии со сказанным при выводе этой формулы.

Единица работы в системе *CGS* называется *эргом*. Один эрг равен работе, производимой единицей силы на единице пути, то есть

$$1 \text{ эрг} = 1 \text{ дин} \cdot \text{см}.$$

В системе *SI* единицей работы является *джоуль*, причем

$$1 \text{ дж} = 1 \text{ н.м}.$$

Наконец, в технической системе MK_fS единица работы называется *килограммометром*. Она обозначается как *кГ.м* и равна работе, требующейся для поднятия груза в 1 *кГ* на высоту одного метра.

Между единицами работы существует соотношение

$$1 \text{ дж} = 10^7 \text{ эрг} = \frac{1}{9{,}81} \text{ кГ} \cdot \text{м}.$$

Работа силы, отнесенная к единице времени, называется *мощностью*. Таким образом, для мощности N имеем выражение

$$N = \frac{d'A}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}. \qquad (17)$$

Для единицы мощности специальное название имеется только в системе *SI*, где она называется *ваттом* (*вт*), причем

$$1 \text{ вт} = 1 \text{ дж/сек}.$$

Между единицами мощности имеет место связь

$$1 \text{ вт} = 10^7 \text{ эрг/сек} = \frac{1}{9{,}81} \text{ кГ} \cdot \text{м/сек}.$$

В системах *SI* и MK_fS на практике часто пользуются более крупными единицами мощности, а именно *киловатом (квт) и лошадиной силой (HP)*, определяемыми соотношениями:

$$1\ квт = 10^3\ вт,$$

$$1\ HP = 75\ кГм\ сек \approx 0{,}736\ квт.$$

Теорема кинетической энергии. Возьмем основное уравнение динамики

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

и умножим обе части скалярно на элементарное перемещение точки $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$. Результат умножения можно записать в виде

$$m\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Но

$$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}d(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}d(v^2) = d\frac{v^2}{2}.$$

Подставляя в предыдущее равенство и внося m под знак дифференциала, находим

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}. \qquad (18)$$

Половина произведения массы точки на квадрат ее скорости называется *кинетической энергией* материальной точки. Равенство (18) выражает теорему кинетической энергии в дифференциальной форме: *дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе приложенной к ней силы.*

Пусть в начальном положении точки, определяемом радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_0$, скорость точки имеет величину v_0, а в конечном, определяемом радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, — величину v. Тогда, интегрируя уравнение (18) вдоль пути точки, получаем следующее выражение теоремы кинетической энергии в конечной форме:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \qquad (19)$$

где A есть работа силы на рассматриваемом перемещении, которую можно найти по одной из формул (13)—(16). Формулировка теоремы будет:

Изменение кинетической энергии материальной точки при ее перемещении из одного положения в другое равно работе силы, приложенной к точке на этом перемещении.

Пример. Материальная точка массы m, находясь на расстоянии r_0 от некоторого центра, начинает двигаться без начальной скорости под действием силы притяжения к этому центру, прямо пропорциональной расстоянию от центра. Найти скорость точки в момент достижения ею центра притяжения, если в начальный момент величина силы притяжения имеет заданное значение F_0.

По условию задачи величина силы притяжения есть

$$F = \kappa r,$$

где κ — коэффициент пропорциональности. Начальное условие дает

$$F_0 = \kappa r_0,$$

следовательно,

$$\kappa = \frac{F_0}{r_0}$$

и

$$F = F_0 \frac{r}{r_0}.$$

Рассматривая r как координату, отсчитываемую от центра притяжения вдоль прямой, по которой движется точка, видим, что ее элементарное перемещение в направлении силы есть $ds = -dr$, ибо $dr < 0$. Поэтому согласно (11′) элементарная работа силы будет

$$d'A = Fds = -Fdr = -\frac{F_0}{r_0} r dr,$$

а вся работа на перемещении до центра притяжения есть

$$A = \int_{r_0}^{0} d'A = -\frac{F_0}{r_0} \int_{r_0}^{0} r dr = \frac{1}{2} F_0 r_0.$$

Учитывая еще, что $v_0 = 0$, из формулы (19) получаем:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} F_0 r_0,$$

откуда

$$v^2 = \frac{F_0 r_0}{m},$$

так что

$$v = \sqrt{\frac{F_0 r_0}{m}}.$$

§ 23. Потенциальное поле сил и интеграл энергии

1. Потенциальное векторное поле. Теорема кинетической энергии доставляет первый интеграл в случае так называемого потенциального силового поля. С подобными векторными полями приходится иметь дело и в других областях механики. Поэтому рассмотрению этого вопроса мы предпошлем общую теорию потенциального векторного поля.

Пусть непрерывная функция $\varphi(x, y, z)$ определена в некоторой области пространства. Тогда эта область называется

скалярным полем этой функции. Аналогично векторному полю это поле называется стационарным, если функция φ зависит только от координат, и нестационарным, если φ зависит также явно от t, то есть, если $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$. Ограничимся далее рассмотрением лишь стационарного поля; однако последующие рассуждения будут справедливы и для нестационарного поля при $t = \text{const}$, то есть для данного момента времени.

Допустим, что функция φ непрерывна и имеет первые частные производные, отличные от нуля во всех точках поля, за возможным исключением отдельных изолированных точек. В таком случае уравнение

$$\varphi(x, y, z) = c$$

есть уравнение некоторой поверхности, называемой *поверхностью уровня*. Строя такие поверхности для значений c, отличающихся на одну и ту же величину Δc на соседних поверхностях, получим семейство поверхностей уровня, являющееся графическим изображением скалярного поля. Построенные поверхности уровня выявляют некоторые свойства рассматриваемой функции: вдоль каждой из поверхностей функция φ остается неизменной; в тех местах, где поверхности идут наиболее густо, имеет место наибольшее изменение функции по нормали к поверхностям, а где они идут наиболее редко, это изменение окажется наименьшим.

Пусть некоторое направление, исходящее из данной точки поля M, определяется единичным вектором $\boldsymbol{s}^\circ$. Тогда координаты x, y, z оказываются вдоль этого направления функциями от пути s, проходимого в направлении $\boldsymbol{s}^\circ$, и производная

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

называется производной по направлению $\boldsymbol{s}$.

Известно, что производные

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

являются направляющими косинусами рассматриваемого направления. Поэтому производную по направлению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\gamma$$

можно рассматривать как проекцию на направление $\boldsymbol{s}$ вектора с проекциями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad \text{(а)}$$

на оси декартовых координат. *Вектор с проекциями* (а) *называется градиентом функции* φ и обозначается как $\operatorname{grad}\varphi$ или $\nabla\varphi$ (∇ — символ, имеющий название „набла"). Таким образом,

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\boldsymbol{\kappa}, \tag{1}$$

а его модуль есть

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\,.$$

Чтобы лучше понять смысл введенного нами вектора, рассмотрим элементарное приращение функции φ

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds,$$

получаемое ею при перемещении из данной точки поля M по всевозможным направлениям на одну и ту же величину ds. Видим, что приращение φ будет тем больше, чем большее значение имеет производная $\partial\varphi/\partial s$. Но

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \operatorname{пр}_{s^\circ}\operatorname{grad}\varphi = |\operatorname{grad}\varphi|\cos(\operatorname{grad}\varphi,\ s^\circ). \tag{2}$$

Отсюда следует, что максимум этой производной будет иметь место для направления s°, совпадающего с направлением градиента, причем этот максимум будет равен как раз $|\operatorname{grad}\varphi|$. Поэтому можно сказать, что *градиентом скалярной функции* φ *называется вектор, имеющий направление быстрейшего возрастания* φ *и по модулю равный производной от функции* φ *по этому направлению.*

Вектор

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi$$

принято называть *потенциальным* вектором, а функцию φ — *потенциалом* вектора $\boldsymbol{a}$. Поле векторов $\boldsymbol{a}$ называют тогда *потенциальным векторным полем*; это поле совпадает со скалярным полем потенциала. Поверхности уровня потенциала часто называют еще *эквипотенциальными* поверхностями.

Укажем на некоторые свойства потенциального вектора.

1. Возьмем эквипотенциальную поверхность, проходящую через некоторую точку поля M. Так как функция φ постоянна вдоль этой поверхности, то для всякого направления s, лежащего в касательной плоскости к поверхности, производная

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0.$$

Тогда по (2) будем иметь для такого направления

$$\cos(\operatorname{grad}\varphi,\ s^\circ) = 0.$$

Это означает, что *потенциальный вектор в каждой точке поля направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности проходящей через эту точку, в сторону возрастания потенциала.* Если поэтому n есть орт соответствующей нормали к поверхности $\varphi = \text{const}$, то градиент функции φ можно еще записать в виде:

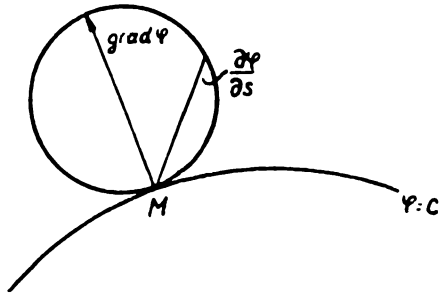
$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, n. \tag{3}$$

Градиенту и производным по направлению от потенциала можно дать следующее очевидное геометрическое толкование: если на векторе градиента построить, как на диаметре, сферу (фиг. 93), то длина какой-либо хорды даст величину производной $\partial\varphi/\partial s$ по данному направлению.

2. Из формулы (3) вытекает, что

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,.$$

Модуль градиента можно назвать напряжением рассматриваемого потенциального векторного поля. Для достаточно



Фиг. 93.

малых перемещений по нормали Δn можем предыдущее равенство переписать с помощью конечных разностей в виде

$$|\operatorname{grad}\varphi| \simeq \frac{\Delta\varphi}{\Delta n}\,.$$

Построим теперь густую сеть эквипотенциальных поверхностей $\varphi = c$ с одинаковым всюду приращением Δc параметра c на соседних поверхностях и примем $\Delta\varphi = \Delta c$, тогда Δn окажется расстоянием между соседними поверхностями по нормали к одной из них. Получающееся равенство

$$|\operatorname{grad}\varphi| \approx \frac{\Delta c}{\Delta n}$$

говорит о том, что *там, где эквипотенциальные поверхности идут гуще* (то есть, где меньше Δn), *напряжение поля больше, а там, где они идут реже, напряжение поля меньше.*

3. Полный дифференциал потенциала есть

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

что иначе можно переписать в виде

$$d\varphi = \operatorname{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{4}$$

Таким образом, *скалярное произведение градиента на вектор элементарного перемещения в поле равно полному дифференциалу потенциала.* Иначе: если $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi$, то

$$\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = a_x dx + a_y dy + a_z dz = d\varphi, \tag{4'}$$

то есть дифференциальный трехчлен

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

является в этом случае полным дифференциалом.

4. Пусть мы имеем некоторый потенциальный вектор $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi$. Интеграл

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$$

называется криволинейным интегралом от вектора $\boldsymbol{a}$ вдоль кривой C. Пользуясь соотношением (4), находим

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \operatorname{grad}\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C d\varphi = \varphi_B - \varphi_A, \tag{5}$$

где φ_A — значение потенциала в начальной точке кривой C, а φ_B — в конечной точке той же кривой. Если при этом φ является однозначной функцией в поле, то равенство (5) говорит о том, что *значение криволинейного интеграла от потенциального вектора $\boldsymbol{a}$ не зависит от пути интегрирования и определяется только значениями потенциала в крайних точках пути.*

2. Необходимые и достаточные условия потенциальности вектора. Интеграл

$$\oint_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r},$$

взятый по замкнутой кривой C, называется *циркуляцией* вектора $\boldsymbol{a}$ вдоль этой кривой. Покажем, что *при однозначности потенциала необходимым и достаточным условием*

потенциальности вектора $\boldsymbol{a}$ *является равенство нулю циркуляции вектора вдоль любой замкнутой кривой в поле.*

Необходимость условия вытекает непосредственно из формулы (5), ибо для замкнутой кривой точки A и B совпадут и в силу однозначности потенциала $\varphi_B = \varphi_A$, так что

$$\oint_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = 0. \tag{6}$$

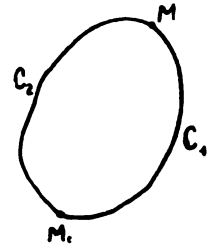
Пусть теперь это условие выполнено; покажем, что тогда вектор $\boldsymbol{a}$ имеет потенциал. С этой целью разобьем контур C точками M_0 и M на части C_1 и C_2 (фиг. 94).

Тогда заданное условие можно записать в виде

$$\int_{M_0(C_1)}^{M} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{M(C_2)}^{M_0} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

Но

$$\int_{M(C_2)}^{M_0} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{M_0(C_2)}^{M} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}.$$



Фиг. 94.

Подставляя в предыдущее равенство, находим

$$\int_{M_0(C_1)}^{M} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{M_0(C_2)}^{M} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Вследствие произвольности контура C это означает, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования. Поэтому при фиксированной точке M_0 этот интеграл окажется функцией верхнего предела, то есть положения точки M:

$$\int_{M_0}^{M} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \varphi(M) = \varphi(x, y, z).$$

Отсюда

$$\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = d\varphi,$$

что по (4) может быть переписано в виде

$$\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} - \operatorname{grad} \varphi \cdot d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{a} - \operatorname{grad} \varphi) \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

А это равенство, в силу произвольности $d\boldsymbol{r}$, возможно лишь, если

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \varphi,$$

что и требовалось доказать.

Покажем на примере, что если φ — многозначная функция, то циркуляция ее градиента может и не равняться нулю. Возьмем

$$\varphi = b \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Тогда φ окажется пропорциональной полярному углу в плоскости (xy)

$$\Theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

При интегрировании вдоль контура, лежащего в этой плоскости и не охватывающего начала координат, угол Θ возвратится к своему первоначальному значению и

$$\oint_C \operatorname{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C d\varphi = b\oint_C d\Theta = 0.$$

Если же начало координат будет находиться внутри контура C, то при обходе всего контура угол Θ возрастает на 2π, и мы получим

$$\oint_C \operatorname{grad}\varphi . d\boldsymbol{r} = 2\pi b,$$

то есть циркуляция окажется отличной от нуля.

Как показывается в теории криволинейных интегралов, вопрос об однозначности потенциала тесно связан с тем, будет ли скалярное поле этой функции односвязным или нет. В последнем случае, то есть для многосвязной области, потенциал окажется многозначной функцией, а циркуляция потенциального вектора по контуру, который нельзя стянуть в точку, не выходя из области определения потенциала, будет отличной от нуля. Так, в рассмотренном примере в точках оси z потенциал не принимает определенного значения, так что точки этой оси не принадлежат полю функции φ; поэтому это поле оказывается двусвязным, и циркуляция от $\operatorname{grad}\varphi$ по любому контуру, охватывающему эту ось, не равна нулю.

Известно также, что циркуляция вектора $\boldsymbol{a}$ по замкнутому контуру может быть по формуле Стокса преобразована в интеграл по поверхности, стягиваемой этим контуром, причем подинтегральная функция равна проекции на нормаль к поверхности вектора, имеющего проекции на оси декартовых координат

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

и называемого *вихрем* вектора $\boldsymbol{a}$. Обозначим этот вектор через $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ или $\operatorname{curl}\boldsymbol{a}$. Тогда, если $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi$, то есть если

$$a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

то

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}.$$

Примем, что функция φ имеет всюду в своем поле непрерывные вторые производные. Тогда правая часть полученного выражения тождественно равна нулю, и поэтому

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0.$$

Аналогично убеждаемся в исчезновении и других проекций вихря. Следовательно, для всякого потенциального вектора $\boldsymbol{a}$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0. \tag{7}$$

Обратно, пусть условие (7) выполнено. Тогда равенство нулю проекций вихря означает, что дифференциальный трехчлен

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

есть полный дифференциал некоторой функции $\varphi(x, y, z)$. Поэтому

$$a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то есть $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \varphi$.

Таким образом, *необходимым и достаточным условием потенциальности вектора является равенство нулю его вихря в любой точке поля* В силу этого потенциальное векторное поле часто называется еще *безвихревым.*

Заметим, что условие (7), в отличие от условия (6), справедливо, очевидно, и для многозначного потенциала.

3. Потенциальное поле сил. Применим полученные результаты к стационарному полю сил. Тогда для того, чтобы данное силовое поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция вдоль любого взятого в поле замкнутого контура равнялась нулю или же чтобы вихрь вектора силы в любой точке поля равнялся нулю, то есть при однозначности потенциала

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0,$$

или при любом потенциале

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0.$$

Отсюда следует существование потенциальной функции для сил поля, которую мы обозначим через $U = U(x,y,z)$, так что

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U,$$

что дает для проекций силы:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Элементарная работа силы окажется равной

$$d'A = dU,$$

представляя в этом случае полный дифференциал.

Потенциал U часто называется еще *силовой* функцией.

Вектор силы в каждой точке поля направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности $U = c$, проходящей через эту точку, в сторону возрастания функции U. Если $\boldsymbol{n}$ — орт нормали, проведенной в эту сторону, то модуль силы равен производной от потенциала по этой нормали, то есть

$$F = |\operatorname{grad} U| = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Проекция силы на любое направление $\boldsymbol{s}^0$ будет

$$F_s = \frac{\partial U}{\partial s},$$

то есть равна производной от потенциала по этому направлению.

Если построить семейство эквипотенциальных поверхностей через одно и то же приращение Δc параметра c на соседних поверхностях, то по виду этого семейства можно судить о напряженности поля в разных его частях: чем гуще идут эти поверхности в данном месте поля, тем больше будет здесь величина силы и наоборот.

Работа силы на конечном пути согласно (5) будет

$$A = \int_{(r_0)}^{(r)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U - U_0, \tag{8}$$

где U_0 — значение потенциала в начальной, а U — в конечной точке пути. Таким образом, ***в потенциальном поле сил работа не зависит от пути перемещения точки и равна разности значений потенциала в крайних точках пути.***

Примеры потенциальных силовых полей.

а. Сила тяжести. Беря ось z направленной вертикально вниз, видим (фиг. 95), что проекции силы тяжести на оси координат будут

$$X = Y = 0, \quad Z = mg.$$

Так как эти проекции постоянны, то все производные от них равны нулю, так что $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$. Следовательно, сила тяжести имеет потенциал, дифференциал которого есть

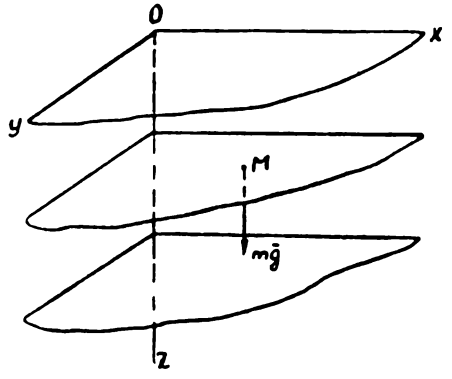
$$dU = d'A = Z dz = mg dz.$$

Отсюда потенциальная функция найдется в виде

$$U = mgz + C. \tag{9}$$

Постоянную интегрирования C можно выбирать совершенно произвольно, ибо ее выбор не отражается на значении производных, определяющих силовое поле.

Эквипотенциальными поверхностями $U = c$ являются горизонтальные плоскости $z = \text{const}$. Если эти поверхности нанести через одно и то же во всем поле приращение Δc параметра c на соседних поверхностях, получим семейство



Фиг. 95.

плоскостей с одной и той же густотой всюду. Этому отвечает тот факт, что сила притяжения постоянна, то есть, что это поле сил однородно. В каждой точке поля M вектор силы направлен вертикально вниз в соответствии с тем, что он должен быть направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциала.

Работа силы тяжести будет

$$A = U - U_0 = mg(z - z_0),$$

где z_0 — вертикальная координата точки в начале пути, а z — в конце пути. Полагая

$$h = |z - z_0|,$$

найдем отсюда

$$A = \pm mgh, \tag{10}$$

где знак плюс отвечает случаю, когда конечное положение точки ниже начального, минус, — когда оно выше начального; h имеет смысл величины перемещения точки по вертикали.

b. Центральная сила. Пусть материальная точка движется в поле некоторой центральной силы, величина ко-

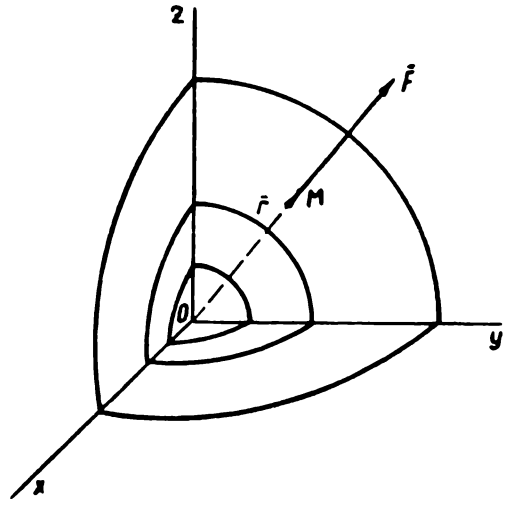
торой $F = F(r)$ зависит от расстояния до центра силы. Примем этот центр за начало координат (фиг. 96).

Если $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, то его единичный вектор есть $\boldsymbol{r}/r$. Поэтому вектор силы можно записать в виде

$$\vec{F} = \pm F(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

где знак плюс отвечает силе отталкивания, а знак минус — силе притяжения.

Убедимся в существовании потенциала, показав, что в данном случае элементарная работа силы является полным



Фиг. 96.

дифференциалом. Элементарная работа силы будет

$$d'A = \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = \pm\,\frac{F(r)}{r}\,\boldsymbol{r}.d\boldsymbol{r}.$$

Но

$$\boldsymbol{r}.d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\,d(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\,d(r^2) = r\,dr.$$

Следовательно,

$$d'A = \pm F(r)\,dr.$$

Отсюда видно, что

$$d'A = dU,$$

где

$$U = \pm \int F(r)\,dr. \qquad (11)$$

Очевидно, что эта функция U и будет потенциалом центральной силы, причем знак перед интегралом берется в зависимости от указанного выше характера силы.

Эквипотенциальными поверхностями в данном случае являются поверхности $r = \text{const}$, то есть концентрические сферы с центром в начале координат. Так как сила есть функция от r, то в зависимости от характера этой функции семейство эквипотенциальных сфер $U = c$, при том же условии для Δc, что и ранее, будет сгущаться или при приближении к центру поля или при удалении от него.

Направление силы и ее величина находятся в соответствии с общей теорией потенциального поля сил. Работа силы на конечном пути определится как разность соответствующих значений потенциала (11).

с. Сила всемирного тяготения. Возьмем частный случай, когда центральной силой является сила притяжения к неподвижному центру по закону всемирного тяготения Ньютона. Как известно, эта сила пропорциональна массе точки и обратно пропорциональна квадрату расстояния от притягивающего центра, то есть

$$F(r) = \frac{\mu m}{r^2},$$

где μ — коэффициент пропорциональности, характеризующий мощность центра притяжения.

Потенциал найдется непосредственно по (11) в виде

$$U = -\mu m \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\mu m}{r} + C. \qquad (12)$$

Если за нуль потенциала принять бесконечно удаленную точку ($r = \infty$), то $C = 0$ и можно взять просто

$$U = \frac{\mu m}{r}.$$

Лекция 12

⑨ Интеграл энергии. Закон сохранения энергии. Пусть материальная точка движется в потенциальном поле сил. Тогда работа силы на конечном перемещении точки выразится по (8) через разность значений потенциала в крайних точках пути в виде

$$A = U - U_0.$$

Подставляя это выражение в уравнение (22—19) теоремы кинетической энергии, находим

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0,$$

что можно переписать в форме

$$\frac{mv^2}{2} = U + h. \tag{13}$$

Здесь

$$h = \frac{mv_0^2}{2} - U_0$$

есть постоянная интегрирования. Уравнение (13) является первым интегралом дифференциальных уравнений движения материальной точки и называется *интегралом энергии.*

Полученному интегралу можно придать иной вид, если вместо потенциальной функции ввести другую функцию V соотношением

$$U = -V + C,$$

где C — произвольная постоянная. Тогда теорема кинетической энергии дает:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = V_0 - V,$$

что иначе можно записать в виде

$$\frac{mv^2}{2} + V = \frac{mv_0^2}{2} + V_0. \tag{14}$$

Функция V носит название *потенциальной энергии*, а интеграл энергии в форме (14) называется *законом сохранения энергии.* Его формулировка будет:

Если приложенная к материальной точке сила имеет потенциал, то полная энергия точки, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остается постоянной во все время движения.

По этой причине потенциальные силы часто называют еще *консервативными* силами (от латинского глагола conservare—сохранять).

Установим механический смысл потенциальной энергии. Как и функция U, потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной произвольной постоянной. Фиксируя эту постоянную, мы тем самым принимаем значение потенциальной энергии равным нулю в некоторой определенной точке поля (точнее — на эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку). Выберем эту постоянную так, чтобы потенциальная энергия оказалась равной нулю в конечной точке пути. Тогда в выражении работы

$$A = V_0 - V$$

нужно положить

$$V = 0 \text{ и } A = V_0.$$

Так как начальным положением точки тоже может быть

любая точка поля, то смысл потенциальной энергии состоит в том, что в данной точке поля она равна той работе, которую совершат силы поля при перемещении материальной точки из этого положения в положение, принятое за нуль потенциальной энергии. Иначе, это есть „скрытая" работа, проявляющаяся при последующем движении точки.

Установленный нами закон сохранения энергии с первого взгляда кажется находящимся в противоречии с общефизическим законом сохранения энергии, ибо последний справедлив всегда, формула же (14) оказалась выполняющейся лишь при наличии потенциальных сил. В действительности здесь никакого противоречия нет, ибо у нас идет речь о сохранении лишь механической энергии и совсем не учитывается переход энергии из одного вида в другой. Поэтому всякий раз, когда силы не имеют потенциала и уравнение (14) оказывается не выполняющимся, мы имеем дело с превращением части механической энергии в другие виды энергии. Типичным примером здесь является сила трения. В самом деле, если на различных возможных для данной материальной точки путях нормальная реакция связи остается постоянной, то будет постоянна и сила трения T. Ее работа окажется равной

$$-Ts,$$

где s — длина пути, проходимого точкой при перемещении из одного положения в другое. Следовательно, эта работа окажется разной для различных возможных траекторий точки, то есть будет зависеть от пути, по которому точка проходит из первого положения во второе. Это означает, что сила трения не имеет потенциала, и закон сохранения механической энергии не будет выполняться. В то же время хорошо известно, что при трении поверхности тел нагреваются, так что здесь мы будем иметь дело с переходом части механической энергии в тепловую.

2 Вторая космическая скорость. Парадокс спутника. В качестве примера рассмотрим движение материальной точки в поле силы земного притяжения по закону Ньютона. Потенциал U этой силы определяется формулой (12), из которой следует, что потенциальная энергия в данном случае будет

$$V = -\frac{\mu m}{r} + C,$$

где m — масса точки, а r — ее расстояние от центра Земли. Подставляя это выражение в формулу закона сохранения энергии (14) и сокращая на m, находим

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0},$$

где v_0 и r_0 — начальные элементы движения точки. Отсюда получаем

$$v^2 = v_0^2 + 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \qquad \text{(a)}$$

Постоянную μ найдем из того условия, что на поверхности Земли сила притяжения обращается в обычную силу тяжести. Так как величина силы притяжения есть

$$F = \frac{\rho m}{r^2},$$

то ρ найдется из соотношения

$$\frac{\rho m}{R^2} = mg,$$

где R — радиус Земли. Отсюда

$$\rho = R^2 g. \qquad (15)$$

Подставляя в (a), имеем

$$v^2 = v_0^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \qquad \text{(b)}$$

Пользуясь последним равенством, найдем так называемую *вторую космическую скорость*, то есть ту наименьшую начальную скорость v_0, с которой нужно бросить с Земли материальную точку, чтобы она совсем вышла из-под влияния силы земного притяжения. Для этого в формуле (b) нужно положить $r_0 = R$, $r = \infty$, $v = 0$; таким путем получим

$$v_0^2 = 2gR.$$

Беря $R = 6370$ *км*, находим отсюда

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2.9{,}81.6370.10^3} \approx 11200 \text{ м/сек} \quad 11{,}2 \text{ км/сек}.$$

В действительности эта скорость должна быть несколько большей, чтобы брошенное тело могло преодолеть сопротивление земной атмосферы, не учитываемое предыдущим расчетом.

Рассмотрим теперь движение искусственного спутника Земли, запущенного на круговую орбиту радиуса r_0, расположенную в верхних слоях атмосферы. Вследствие очень малой величины силы сопротивления воздуха скорость спутника при дальнейшем его движении с достаточным приближением может определяться по формуле (b). При этом действие силы сопротивления, сколь бы она ни была мала, будет приводить к постепенному снижению спутника. Поэтому расстояние r от центра земли будет непрерывно умень-

шаться, а разность $\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}$ непрерывно увеличиваться, что приведет к постепенному возрастанию скорости спутника. Так как обычно действие сопротивления среды приводит к уменьшению скорости движущегося тела, то этот результат получил название *парадокса спутника.*

§ 24. Прямолинейное движение точки. Гармонические колебания.

1. Дифференциальное уравнение движения. При движении точки по прямой приложенная к ней сила направлена по этой прямой, ибо в противном случае точка не могла бы оставаться на ней. Наоборот, если начальная скорость равна нулю или направлена по прямой, вдоль которой действует сила, то точка будет двигаться по этой прямой, так как будет отсутствовать всякая причина, которая бы могла вызвать сход точки с прямой.

Принимая прямую за ось x, будем согласно (21—2) иметь единственное дифференциальное уравнение движения точки

$$m\ddot{x} = X, \tag{1}$$

где X—проекция силы в натуральную величину, зависящая в общем случае от x, $\dot{x}$ и t.

В результате интегрирования получим общий интеграл уравнения (1) в виде

$$x = x(t,\ C_1,\ C_2).$$

Для определения постоянных необходимо задать начальное положение и начальную скорость точки, то есть при $t=0$— значения $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$.

2. Частные случаи. Рассмотрим частные случаи задания силы.

а. Сила есть функция только времени t, то есть

$$X = X(t).$$

В таком случае теорема о количестве движения доставляет первый интеграл

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_0^t X(t)\,dt,$$

откуда

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{1}{m}\int_0^t X(t)\,dt.$$

Интегрируя еще раз, получаем закон движения

$$x = \int_0^t \left\{ \dot{x}_0 + \frac{1}{m} \int_0^t X(t)\, dt \right\} dt + x_0.$$

b. Сила зависит только от положения точки, то есть

$$X = X(x).$$

Здесь первый интеграл дает теорема кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} X(x)dx = f(x),$$

откуда

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m} f(x).$$

Понимая под v алгебраическое значение скорости $v = \dot{x}$, находим отсюда

$$\dot{x} = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)},$$

где знак берется в зависимости от направления движения точки: плюс — при движении в сторону возрастания x, минус — в противоположном случае. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dx}{\pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}} = dt.$$

Интегрирование этого уравнения дает закон движения точки $x = x(t)$.

c. Пусть сила является функцией только скорости

$$X = X(v).$$

Уравнение движения

$$m \frac{dv}{dt} = X(v),$$

разделяя переменные, перепишем в виде

$$m \frac{dv}{X(v)} = dt,$$

что дает

$$m \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{X(v)} = t. \qquad \text{(a)}$$

Разрешая это уравнение относительно v, получаем

$$v = \dot{x} = \varphi(t),$$

откуда интегрированием находим закон движения точки

$$x = \int_0^t \varphi(t)\,dt + x_0.$$

Если же уравнение (a) нельзя решить относительно v, то можно поступить иначе. Имеем:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

Следовательно, уравнение движения можно переписать в виде

$$mv\frac{dv}{dx} = X(v),$$

откуда

$$m\frac{vdv}{X(v)} \quad dx.$$

Интегрирование дает

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{X(v)} = x - x_0. \qquad \text{(b)}$$

Решая это уравнение относительно $v = \dot{x}$, найдем закон движения точки тем же путем, как и в случае силы, зависящей от положения точки. Если же этого сделать нельзя, то уравнения (a) и (b), рассматриваемые совместно, дадут закон движения точки $x = x(t)$ в параметрической форме с помощью параметра v.

3. Падение тяжелой точки в сопротивляющейся среде. Пусть материальная точка под действием силы тяжести падает без начальной скорости в сопротивляющейся среде. Примем за начало координат начальное положение точки, а ось x направим вертикально вниз. Тогда сила тяжести окажется направленной по этой оси, а тормозящая движение сила сопротивления — противоположно ей. Как уже упоминалось, силу сопротивления среды можно считать зависящей только от скорости. Удобно величину этой силы взять в виде

$$mgf(v).$$

Тогда дифференциальное уравнение движения точки будет

$$m\frac{dv}{dt} = mg - mgf(v)$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g\,[1 - f(v)],$$

при $v = \dot{x} > 0$.

Разделение переменных приводит к уравнению

$$\frac{dv}{1 - f(v)} = g dt, \qquad \text{(a)}$$

которое может быть проинтегрировано, если будет известна функция $f(v)$.

Рассмотрим частный случай, когда силу сопротивления можно считать пропорциональной первой степени скорости, то есть когда

$$f(v) = \kappa v.$$

Тогда уравнение (a) будет

$$\frac{dv}{1 - \kappa v} = g dt.$$

Интегрирование дает:

$$-\frac{1}{\kappa} \ln (1 - \kappa v) = gt + C_1. \qquad \text{(b)}$$

Из начального условия при $t = 0$ $v = 0$ имеем $C_1 = 0$. Поэтому из (b) находим

$$1 - \kappa v = e^{-\kappa g t},$$

откуда

$$v = \dot{x} = \frac{1 - e^{-\kappa g t}}{\kappa}. \qquad \text{(c)}$$

Это выражение показывает, что с течением времени скорость точки будет монотонно возрастать, имея, однако, предел

$$v^* = \lim_{t \to \infty} v = \frac{1}{\kappa}.$$

Интегрируя выражение (c), получаем

$$x = \frac{t}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^2 g} e^{-\kappa g t} + C_2.$$

Из начального условия при $t = 0$, $x = 0$ находим

$$C_2 = -\frac{1}{\kappa^2 g},$$

так что окончательно закон движения точки принимает вид:

$$x = \frac{t}{\kappa} - \frac{1}{\kappa^2 g}(1 - e^{-\kappa g t}).$$

Разлагая $e^{-\kappa gt}$ в ряд, имеем:

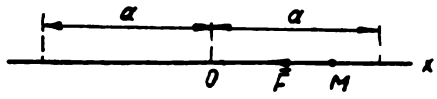
$$x = \frac{t}{\kappa} - \frac{1}{\kappa^2 g}\left(1 - 1 + \kappa gt - \frac{\kappa^2 g^2 t^2}{2} + \frac{\kappa^3 g^3 t^3}{6} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{gt^2}{2} - \frac{\kappa g^2 t^3}{6} + \ldots$$

Отсюда видна поправка к закону свободного падения тяжелой точки, даваемая силой сопротивления среды при достаточно малых t.

4. Простое гармоническое колебание точки. Пусть материальная точка M находится под действием силы притяжения к некоторому центру, прямо пропорциональной расстоянию от этого центра. Такие силы возникают, например, в упругих телах, следующих закону Гука и стремящихся восстановить свою первоначальную форму; такой, в частности, будет сила деформированной винтовой пружины, пропорциональная ее сжатию или растяжению. По этой причине рассматриваемую силу называют *квазиупругой* или *восстанавливающей* силой.

Пусть начальная скорость точки или равна нулю или направлена по прямой, соединяющей точку с центром силы. Тогда последующее движение точки будет происходить по этой же прямой. Примем последнюю за ось x, беря начало координат O в центре силы (фиг. 97). Величина силы будет $F = \kappa r$, где r — расстояние от центра силы, а ее проекция на ось x при любом положении точки M, справа или слева от O, будет



Фиг. 97.

$$X = -\kappa x.$$

Коэффициент пропорциональности κ - размерная величина. При его определении обычно силу измеряют в килограммах, а длину — в сантиметрах. Поэтому размерность κ есть

$$[\kappa] = \frac{[F]}{[r]} = \frac{кГ}{см}.$$

Для пружины коэффициент κ называется ее жесткостью.

Дифференциальное уравнение движения точки в данном случае будет

$$m\ddot{x} = -\kappa x,$$

что можно представить в виде

$$\ddot{x} + n^2 x = 0, \qquad (2)$$

где

$$n^2 = \frac{\kappa}{m}. \tag{3}$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Как известно, его общий интеграл имеет вид:

$$x = A\cos nt + B\sin nt. \tag{4}$$

Вводя вместо A и B другие произвольные постоянные a и ε соотношениями

$$A = a\sin\varepsilon, \quad B = a\cos\varepsilon,$$

можем полученному решению придать форму

$$x = a\sin(nt + \varepsilon). \tag{5}$$

Так как синус периодически повторяет свои значения, изменяясь от -1 до $+1$, то точка будет совершать колебательное движение около центра силы. Это движение называется *простым* гармоническим колебанием. Величина крайнего отклонения точки a называется *амплитудой* колебания, аргумент синуса $nt + \varepsilon$ — *фазой* колебания, ε — *начальной фазой*.

Промежуток времени T, по истечении которого точка вернется в исходное положение, имея ту же по величине и направлению скорость, называется *периодом* колебания. Так как

$$\dot{x} = an\cos(nt + \varepsilon),$$

то период T найдется из того соображения, что по истечении этого времени как синус, так и косинус, входящие в x и $\dot{x}$, должны повторить свои значения, то есть

$$\sin[n(t+T) + \varepsilon] = \sin(nt + \varepsilon),$$

$$\cos[n(t+T) + \varepsilon] = \cos(nt + \varepsilon).$$

Одновременное выполнение этих равенств возможно, если

$$nT = 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{n}. \tag{6}$$

Обратная величина

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{n}{2\pi},$$

представляющая собой число колебаний в секунду, называется *частотой* колебания.

Постоянные интегрирования a и ε определяются, как всегда, из начальных условий. В частности, если при $t = 0$

$v = 0$ и точка занимает некоторое положение $x = x_0$, получаем два равенства для определения постоянных:

$$an\cos\varepsilon = 0, \quad a\sin\varepsilon = x_0.$$

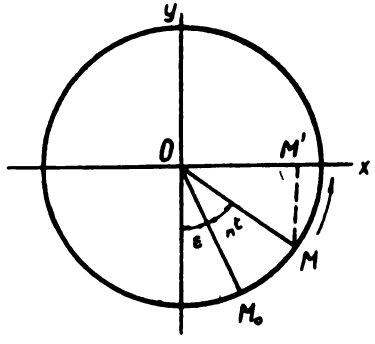
Из первого находим $\varepsilon = \pi/2$, а из второго $a = x_0$. Поэтому согласно (5) закон колебания точки будет

$$x = x_0\cos nt.$$

График движения точки по уравнению (5) будет иметь вид обычной синусоиды, у которой все ординаты увеличены в a раз.

Колебание точки вдоль оси x по установленному закону можно получить еще следующим образом. Представим себе, что точка M (фиг. 98) равномерно движется по окружности радиуса $OM = a$ против стрелки часов. Тогда радиус-вектор точки, составляющий в начальный момент угол ε с отрицательной осью y, вращаясь с некоторой угловой скоростью $n = \text{const}$ вокруг центра окружности, к моменту t повернется на угол nt. Поэтому проекция M' точки M на ось x, как видно из чертежа, будет иметь в данный момент координату

$$x = a\sin(nt + \varepsilon),$$



Фиг. 98.

то есть как раз будет совершать простое гармоническое колебание. Так как величина n оказалась угловой скоростью точки M, то ее называют *угловой частотой*, а часто, как и ν, просто частотой.

5. Апериодическое движение и затухающее колебание точки. Пусть на точку, помимо восстанавливающей силы, действует еще сила сопротивления среды $\boldsymbol{F}_1 = -2mb\boldsymbol{v}$, пропорциональная первой степени скорости и направленная, как всегда, противоположно движению точки. Тогда ее проекция на ось x будет

$$X_1 = -2mb\dot{x},$$

и дифференциальное уравнение движения точки примет вид

$$m\ddot{x} = -\kappa x - 2mb\dot{x}.$$

Деля обе части уравнения на m и перенося все члены в левую часть, получаем уравнение

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + n^2x = 0, \tag{7}$$

где n^2 имеет то же значение (3).

Снова имеем дело с линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Как известно, частное решение такого уравнения следует искать в виде $x = e^{\alpha t}$. Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение и сокращая общий множитель $e^{\alpha t}$, приходим к характеристическому уравнению

$$\alpha^2 + 2b\alpha + n^2 = 0.$$

Корни этого уравнения будут

$$\alpha_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - n^2}. \qquad (a)$$

Здесь возможны три случая, которые мы и рассмотрим далее.

1. Сопротивление среды настолько велико, что $b > n$. Тогда оба корня характеристического уравнения различны и вещественны. Общий интеграл уравнения (7) есть

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \qquad (8)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям. Так как $\sqrt{b^2 - n^2} < b$, то согласно (а) оба корня α_1 и α_2 отрицательны. Поэтому при неограниченном возрастании времени t координата x будет стремиться к нулю.

Из характера поведения показательных функций с отрицательным вещественным показателем следует, что если в начальный момент было $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 < 0$, то точка уже с самого начала будет двигаться к началу координат O; если же $\dot{x}_0 > 0$, то сначала точка будет удаляться от центра O; затем в момент времени t, при котором $\dot{x} = 0$, x достигает максимума и точка начнет двигаться обратно, постепенно приближаясь к O.

Таким образом, движение точки в данном случае будет апериодическим, причем точка с самого начала движения или по истечении некоторого промежутка времени будет приближаться к центру квазиупругой силы по асимптотическому закону.

2. Сопротивление среды таково, что $b = n$. Тогда оба корня (а) окажутся вещественными и равными друг другу:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -b.$$

Общий интеграл уравнения (7) в этом случае имеет вид

$$x = e^{-bt}(C_1 + C_2 t).$$

Движение точки опять окажется апериодическим, и так как

$$\lim_{t \to \infty}(te^{-bt}) = 0,$$

то при больших значениях t точка тоже будет асимптотически приближаться к центру квазиупругой силы.

3. Сопротивление среды настолько мало, что $b<n$. Если ввести обозначение

$$\omega^2 = n^2 - b^2 > 0,$$

то корни (а) характеристического уравнения принимают вид

$$\alpha_{1,2} = -b \pm i\omega,$$

то есть они будут комплексными и сопряженными. Общий интеграл (8) можно представить в виде

$$x = e^{-bt}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}).$$

Переходя здесь к тригонометрическим функциям, получаем

$$x = e^{-bt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t), \qquad (9)$$

где A и B — произвольные постоянные. Вводя новые постоянные интегрирования a и ε равенствами

$$A = a\sin\varepsilon, \quad B = a\cos\varepsilon,$$

можем еще общее решение уравнения (7) взять в форме

$$x = ae^{-bt}\sin(\omega t + \varepsilon). \qquad (10)$$

Таким образом, в этом случае мы будем иметь колебание с переменной амплитудой, равной ae^{-bt}, монотонно уменьшающейся с течением времени и стремящейся к нулю при $t \to \infty$. Поэтому это колебание называется *затухающим* колебанием.

Вследствие уменьшения амплитуды со временем полученное движение нельзя назвать периодическим. Однако период и частоту периодического множителя $\sin(\omega t + \varepsilon)$, то есть величины

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

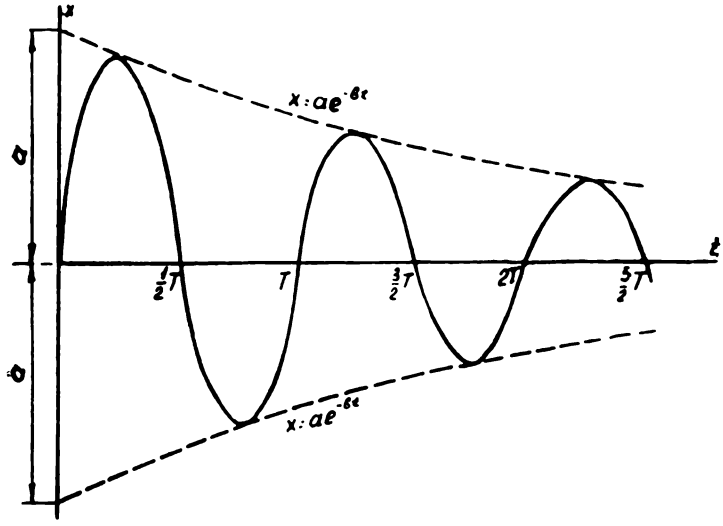
условно называют периодом и частотой затухающего колебания. Так как

$$\omega = \sqrt{n^2 - b^2} < n,$$

то период будет больше, а частота меньше, чем для простого гармонического колебания. Иными словами, сопротивление среды приводит к замедлению колебаний точки.

Для моментов времени $t = 0,\ T,\ 2T,\ 3T, \ldots$ амплитуда колебания ae^{-bt} принимает последовательность значений a, ae^{-bT}, ae^{-2bT}, ae^{-3bT}, ..., образующих геометрическую прогрессию со знаменателем e^{-bT}. Эта характеристика затухающего колебания называется *декрементом затухания*, а $\ln e^{-bT} = -bT$ — *логарифмическим декрементом затухания*.

График затухающего колебания можно представить в виде синусоиды с постепенно уменьшающимися ординатами, расположенной между симметричными кривыми $x=ae^{-bT}$ и $x=-ae^{-bT}$ (фиг. 99).



Фиг. 99.

6. Вынужденное колебание. Период затухающего колебания зависит от угловой частоты ω, которая в свою очередь зависит, помимо массы точки m, от коэффициента квазиупругой силы κ и коэффициента силы сопротивления b, так что период определяется характеристиками, связанными с физическими свойствами той механической системы, к которой принадлежит данная материальная точка. Такую систему, например, образует пружина с подвешенным на ней грузом и окружающей средой. Поэтому затухающее колебание, так же как и простое гармоническое колебание, называется еще *собственным* или *свободным* колебанием материальной точки.

Помимо такого колебания, точка может еще испытывать колебание совсем иной природы, вызываемое некоторой внешней для данной системы силой, являющейся периодической функцией времени. Такая сила внесет изменение в движение колеблющейся точки, вследствие чего ее принято называть *возмущающей* силой.

Пусть, например, возмущающая сила меняется по закону синуса, то есть для нее

$$X = P' \sin (pt \quad \beta),$$

где P' — амплитуда силы, p — ее частота. Тогда при нали-

чии еще квазиупругой силы и силы сопротивления среды дифференциальное уравнение движения точки примет вид

$$m\ddot{x} = -\kappa x - 2mb\dot{x} + P' \sin(pt + \beta).$$

Деля уравнение на m, можем его переписать в форме

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + n^2 x = P \sin(pt + \beta), \qquad \text{(a)}$$

где n^2 есть по-прежнему выражение (3), а

$$P = \frac{P'}{m}. \qquad \text{(b)}$$

Общий интеграл уравнения (a), являющегося неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, имеет, как известно, вид

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 — общий интеграл однородного уравнения, получающегося из данного отбрасыванием правой части, а x_2 — любое частное решение уравнения (a).

Однородное уравнение есть уравнение (7). Ограничиваясь далее случаем достаточно малого сопротивления среды, когда $b<n$, видим, что x_1 имеет вид (10), то есть

$$x_1 = ae^{-bt} \sin(\omega t + \varepsilon),$$

где a и ε — произвольные постоянные, а $\omega = \sqrt{n^2 - b^2}$.

Частное решение ищем в форме

$$x_2 = C \cos pt + D \sin pt.$$

Дифференцирование приводит к выражениям:

$$\dot{x}_2 = -pC \sin pt + pD \cos pt, \qquad \ddot{x}_2 = -p^2 C \cos pt - p^2 D \sin pt$$

Поэтому подстановка x_2 в уравнение (a) дает:

$$-p^2 C \cos pt - p^2 D \sin pt - 2bpC \sin pt + 2bpD \cos pt +$$

$$+ n^2 C \cos pt + n^2 D \sin pt = P(\cos\beta \sin pt + \sin\beta \cos pt).$$

Приравнивая друг другу коэффициенты при $\cos pt$ и $\sin pt$ в обеих частях уравнения, находим следующие уравнения для определения коэффициентов C и D:

$$(n^2 - p^2)C + 2bpD = P\sin\beta,$$

$$-2bpC + (n^2 - p^2)D = P\cos\beta.$$

Исключая из этих уравнений сначала D, а затем C, находим:

$$\left.\begin{aligned}[(n^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2]C &= P[(n^2 - p^2)\sin\beta - 2bp\cos\beta],\\ [(n^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2]D &= P[(n^2 - p^2)\cos\beta + 2bp\sin\beta].\end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

Введем угол γ формулами:

$$\cos\gamma = \frac{n^2 - p^2}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4b^2p^2}}, \quad \sin\gamma = \frac{-2bp}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4b^2p^2}},$$

так что

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{2bp}{n^2-p^2}. \tag{d}$$

Тогда разделив равенства (c) на общий коэффициент левых частей, находим следующие выражения для искомых коэффициентов:

$$C = \frac{P\sin(\beta+\gamma)}{\sqrt{(n^2-p^2)+4b^2p^2}}, \quad D = \frac{P\cos(\beta+\gamma)}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4b^2p^2}}.$$

Подставляя C и D в x_2, получаем частное решение уравнения (a) в виде:

$$x_2 = \frac{P}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4b^2p^2}}\sin(pt+\beta+\gamma).$$

Таким образом, общее решение уравнения (a) будет

$$x = ae^{-bt}\sin(\omega t+\varepsilon) + \frac{P}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4b^2p^2}}\sin(pt+\beta+\gamma). \tag{11}$$

Как видим, в рассматриваемом случае закон движения точки имеет сложный характер, получающийся в результате наложения на собственное колебание нового дополнительного колебания, обязанного действию возмущающей силы. Это второе колебание называется *вынужденным*. Его частота совпадает с частотой возмущающей силы.

Постоянные интегрирования a и ε входят только в собственное колебание. Поэтому это колебание зависит не только от заданных постоянных b и ω, но и от начальных условий движения. Так как угол γ определяется равенством (d) и все остальные постоянные, входящие в вынужденное колебание, заданы, то вынужденное колебание не зависит от начальных условий.

С течением времени собственное колебание постепенно затухает, и движение материальной точки все более будет определяться вынужденным колебанием.

Если сопротивление среды отсутствует, то $b = 0$, $\omega = n$ и по (d) $\gamma = 0$; закон движения точки согласно (11) будет тогда:

$$x = a\sin(nt+\varepsilon) + \frac{P}{n^2-p^2}\sin(pt+\beta). \tag{12}$$

Видим, что в этом случае не только частота, но и началь-

ная фаза вынужденного колебания совпадают с частотой и начальной фазой возмущающей силы.

Полученные результаты легко могут быть распространены на случай произвольной возмущающей силы, изменяющейся со временем по периодическому закону с периодом $T = 2\pi/p$. В самом деле, такая сила, как установил Фурье, может быть разложена в бесконечный абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида

$$P_0' + \sum_{\kappa=1}^{\infty} P'_\kappa \sin(\kappa p t + \alpha_\kappa).$$

Тогда, в силу линейности дифференциального уравнения задачи, вынужденное колебание представится суммой частных решений, отвечающих каждому члену ряда в выражении возмущающей силы.

7. Резонанс. Рассмотрим амплитуду вынужденного колебания

$$a_{\text{вын}} = \frac{P}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4b^2p^2}}. \qquad \text{(а)}$$

Ее можно представить в иной форме, если ввести статическое отклонение точки $a_{\text{ст}}$ от центра квазиупругой силы, получающейся при действии на точку этой силы и силы, равной амплитуде P' возмущающей силы. Уравнение равновесия точки в этом случае будет

$$-\kappa x + P' = 0,$$

откуда

$$x = a_{\text{ст}} = \frac{P'}{\kappa}.$$

Деля числитель и знаменатель этого выражения на массу точки m, находим

$$a_{\text{ст}} = \frac{P}{n^2}.$$

Поэтому подставив отсюда $P = a_{\text{ст}} n^2$ в формулу (а) и сокращая n^2, получаем

$$a_{\text{вын}} = \frac{a_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)^2 + 4\frac{b^2}{n^2}\frac{p^2}{n^2}}}.$$

Таким образом, амплитуда вынужденного колебания зависит от отношения частот p/n вынужденного и собственного свободного гармонических колебаний.

Исследуем эту зависимость. Амплитуда $a_{\text{вын}}$ оказалась обратно пропорциональной квадратному корню из величины

$$N = \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^2 + 4\,\frac{b^2}{n^2}\,\frac{p^2}{n^2}.$$

Обозначим

$$z = \frac{p^2}{n^2}\,,\quad \alpha = 4\,\frac{b^2}{n^2}\,,$$

так что

$$N = (1-z)^2 + \alpha z.$$

Отсюда

$$\frac{dN}{dz} = -2(1-z) + \alpha = 2z - 2 + \alpha.$$

Следовательно, если

$$z > 1 - \frac{\alpha}{2}\,,$$

то есть, если

$$\frac{p^2}{n^2} > 1 - 2\,\frac{b^2}{n^2}\,,$$

то

$$\frac{dN}{dz} > 0,$$

и с ростом отношения частот функция N будет только возрастать, а амплитуда $a_{\text{вын}}$ —только убывать. Так как при фиксированном n z будет возрастать от нуля (при котором $N = 1$ и $a_{\text{вын}} = a_{\text{ст}}$), то это может иметь место лишь при

$$1 - 2\frac{b^2}{n^2} < 0,$$

или при

$$b > \frac{n}{\sqrt{2}}\,.$$

Если же

$$b < \frac{n}{\sqrt{2}}\,,$$

то

$$1 - 2\frac{b^2}{n^2} > 0$$

и при малых z будет обязательно

$$z < 1 - \frac{\alpha}{2}\,,$$

так что при этих z

$$\frac{dN}{dz} < 0,$$

и сначала функция N будет убывать, а $a_{\text{вын}}$ — возрастать. Это возрастание амплитуды будет происходить до значения z, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{dN}{dz} = 0,$$

то есть до

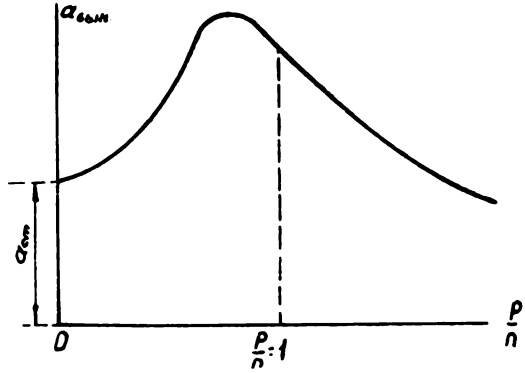
$$z = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

или

$$\frac{p}{n} = \sqrt{1 - 2\frac{b^2}{n^2}}. \qquad \text{(b)}$$

При этом значении отношения частот N достигает минимума, а амплитуда $a_{\text{вын}}$ — максимума. Пройдя этот максимум, $a_{\text{вын}}$ начнет монотонно убывать, стремясь к нулю при $p \to \infty$. Графически этот закон изменения амплитуды в функции от отношения частот можно представить кривой, изображенной на фиг. 100.

Согласно (b) максимум амплитуды будет получаться при значении отношения частот, несколько меньшим единицы,



Фиг. 100.

и это отношение будет тем ближе к единице, чем меньше коэффициент b силы сопротивления. Уменьшение b и приближение p/n к единице будет сопровождаться уменьшением минимума N и возрастанием максимума амплитуды $a_{\text{вын}}$, стремящегося к бесконечности при $b \to 0$.

Рассмотренное явление возрастания амплитуды вынужденного колебания называется *резонансом*. Как видим, при малом сопротивлении среды резонанс может достигать весьма больших размеров. Это имеет большое значение для техники, где всякого рода сооружения, подвергающиеся

при их работе каким-либо внешним нагрузкам периодического характера, должны быть обязательно рассчитаны на явление резонанса с тем, чтобы амплитуды возможных вынужденных колебаний не превысили опасной для данного сооружения величины.

Если сопротивление среды отсутствует, то согласно (12) амплитуда вынужденного колебания есть

$$a_{\text{вын}} = \frac{P}{n^2 - p^2},$$

и при $p = n$ она обращается в бесконечность. Это означает, что найденное нами частное решение дифференциального уравнения движения точки, выражающее вынужденное колебание, при $p = n$ не существует, и его следует искать в другой форме.

Дифференциальное уравнение движения точки для данного случая принимает вид

$$\ddot{x} + n^2 x = P \sin(pt + \beta).$$

Частное решение ищем в форме

$$x_2 = Ct \cos(pt + \beta).$$

Отсюда

$$\dot{x}_2 = C \cos(pt + \beta) - pCt \sin(pt + \beta),$$

$$\ddot{x}_2 = -2pC \sin(pt + \beta) - p^2 Ct \cos(pt + \beta).$$

Подстановка в дифференциальное уравнение дает

$$-2pC \sin(pt + \beta) - p^2 Ct \cos(pt + \beta) + n^2 Ct \cos(pt + \beta) = P \sin(pt + \beta).$$

Так как $n^2 = p^2$, то члены с косинусами уничтожаются, а приравнивание коэффициентов при синусах дает

$$C = -\frac{P}{2p}.$$

Таким образом, в этом случае общее решение дифференциального уравнения будет

$$x = a \sin(nt + \varepsilon) - \frac{P}{2p} t \cos(pt + \beta).$$

Как видим, амплитуда вынужденного колебания с течением времени будет неограниченно возрастать.

8. Колебание в присутствии постоянной силы и силы трения. Пусть на материальную точку, помимо квазиупругой силы, вдоль прямой, по которой движется

точка, действует еще некоторая постоянная сила P'. Тогда дифференциальное уравнение движения точки будет

$$m\ddot{x} = -\kappa x + P',$$

что иначе можно записать в виде

$$\ddot{x} + n^2 x = P, \qquad \text{(a)}$$

где

$$n^2 = \frac{\kappa}{m}, \qquad P = \frac{P'}{m}.$$

Положение статического равновесия точки под действием обеих рассматриваемых сил снова определяется значением координаты x, равным

$$a_{\text{ст}} = \frac{P}{n^2} = \frac{P'}{\kappa}.$$

Перейдем к новой переменной, полагая

$$x = x' + a_{\text{ст}}. \qquad \text{(b)}$$

Так как $n^2 a_{\text{ст}} = P$, то при этой замене переменной уравнение (a) примет вид

$$\ddot{x}' + n^2 x' = 0.$$

Следовательно, мы по-прежнему будем иметь простое гармоническое колебание с той же частотой, но только оно будет происходить не около центра квазиупругой силы, а около точки $x' = 0$, то есть около точки $x = a_{\text{ст}}$. Таким образом, постоянная по величине и направлению сила не изменяет характера колебания, а только смещает центр колебания в положение статического равновесия точки.

Если колебание происходит в присутствии постоянной по величине силы трения, то дело будет обстоять иначе. Сила трения всегда направлена противоположно движению точки; поэтому она не сохраняет постоянного направления и при переходе от одного размаха к другому меняет свое направление на противоположное. В силу этого задачу приходится решать отдельно для каждого размаха. Пользуясь решением предыдущей задачи, мы должны для размахов, при которых точка идет в направлении оси x, положить $P' = -T$, а при каждом движении точки в противоположном направлении брать $P' = T$. Тогда согласно (b) общее решение для размахов первого вида будет

$$x = a \sin(nt + \varepsilon) - \frac{T}{\kappa},$$

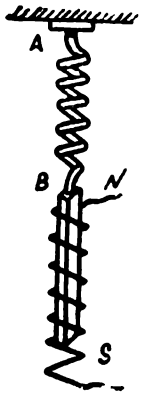
а для второго вида

$$x = a \sin(nt - \varepsilon) + \frac{T}{\kappa}.$$

При этом начальными условиями для определения постоянных интегрирования a и ε будут служить значения x и $\dot{x}$ в конце предыдущего размаха, причем всегда $\dot{x} = 0$. Колебание, очевидно, прекратится в конце того размаха, для которого окажется

$$\kappa |x| < T.$$

Пример. На пружине жесткостью $\kappa = 20$ *Г/см* (фиг. 101) подвешен магнитный стержень весом в 100 *Г*. Нижний конец магнита проходит через катушку, по которой идет переменный ток $i = 20 \sin 8\pi t$ *ампер*. Ток идет с момента времени $t = 0$, втягивая стержень в соленоид; до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Сила взаимодействия между магнитом и катушкой определяется равенством $F = 16\pi i$ *дин*. Определить вынужденные колебания магнита.



Фиг. 101

Подставляя значение силы тока в F, находим, что действующая на магнит возмущающая сила есть

$$F = 320\pi \sin 8\pi t \text{ дин},$$

так что амплитуда этой силы равна $P = 320\pi$ *дин*, а частота $p = 8\pi$ *1/сек*.

Амплитуда вынужденного колебания ввиду отсутствия сопротивления среды будет

$$a_{\text{вын}} = \frac{P}{n^2 - p^2}.$$

В системе *CGS* масса стержня есть 100 г. Поэтому

$$P = \frac{P'}{m} = \frac{320\pi}{100} = 3{,}2\pi \frac{\text{дин}}{\text{г}} = 3{,}2\pi \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}.$$

Квадрат частоты собственного колебания равен

$$n^2 = \frac{\kappa}{m} = \frac{20}{100} \frac{\text{Г}}{\text{гсм}} = \frac{20.980}{100} \frac{1}{\text{сек}^2} = 196 \frac{1}{\text{сек}^2}.$$

Таким образом, получаем

$$a_{\text{вын}} = \frac{3{,}2\pi}{196 - 64\pi^2} = \frac{3{,}2.3{,}14}{196 - 64.9{,}87} = \frac{3{,}2.3{,}14}{196 - 631} = \frac{10{,}05}{435} \approx -0{,}023 \text{ см}.$$

Так как частота вынужденного колебания совпадает с частотой возмущающей силы, то искомое вынужденное колебание будет происходить по закону

$$x = -0{,}023 \sin 8\pi t \text{ см}.$$

9. Понятие о нелинейных колебаниях материальной точки. На практике часто дифференциальное уравнение колебательного движения точки оказывается нелинейным, тогда и само колебание тоже называется нелинейным. Это может случиться, например тогда, когда колебание происходит под действием силы притяжения, не следующей закону пропорциональности, или когда сила сопротивления среды пропорциональна не первой, а более высокой степени скорости.

Задачи о нелинейных колебаниях представляют большие математические трудности и часто даже не сводятся к квад-

ратурам, а если и сводятся к ним, то последние обычно не вычисляются с помощью элементарных функций. Поэтому здесь находят применение различные приближенные методы интегрирования.

В качестве примера рассмотрим колебание материальной точки, находящейся под действием восстанавливающей силы $X = -\kappa x$ и силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости. Здесь не будет автоматической перемены знака силы сопротивления при изменении направления движения, поэтому для этой силы будем иметь выражение

$$X_1 = \pm \frac{b}{2} m\dot{x}^2,$$

где знак минус отвечает движению точки в положительном направлении оси x, а плюс — при движении против этого направления. Форма коэффициента в X_1 выбрана из удобства дальнейших рассуждений.

Таким образом, дифференциальное уравнение движения точки будет

$$m\ddot{x} = -\kappa x \pm \frac{b}{2} m\dot{x}^2. \qquad \text{(a)}$$

Пусть в начальный момент точка находится в крайнем правом положении, то есть

$$\text{при } t = 0 \qquad x = x_0 > 0, \qquad \dot{x} = 0.$$

Рассмотрим первый размах колебания точки до крайнего левого положения. Тогда в уравнении (a) мы должны взять верхний знак. Запишем это уравнение в виде

$$\ddot{x} - \frac{b}{2}\dot{x}^2 + \frac{n^2}{2}x = 0, \qquad \text{(b)}$$

где

$$n^2 = 2\frac{\kappa}{m}.$$

Введем подстановку

$$\dot{x}^2 = z.$$

Дифференцирование по времени дает

$$2\dot{x}\ddot{x} = \dot{z},$$

откуда

$$\ddot{x} = \frac{\dot{z}}{2\dot{x}} = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx},$$

и уравнение (b) заменится уравнением

$$\frac{dz}{dx} - bz = -n^2x. \qquad (c)$$

Легко видеть, что общий интеграл однородного уравнения есть

$$z_1 = Ce^{bx}.$$

Частный интеграл ищем в виде

$$z_2 = Ax + B.$$

Подстановка в (c) дает

$$A - Abx - Bb = -n^2x,$$

следовательно,

$$A - Bb = 0, \qquad Ab = n^2,$$

откуда

$$A = \frac{n^2}{b}, \qquad B = \frac{n^2}{b^2}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (c) будет

$$z = z_1 + z_2 = Ce^{bx} + \frac{n^2}{b^2}(bx + 1). \qquad (d)$$

Заданные начальные условия дают: при $x = x_0$ $z = 0$. Поэтому постоянная интегрирования C найдется из уравнения

$$Ce^{bx_0} + \frac{n^2}{b^2}(bx_0 + 1) = 0,$$

так что

$$C = -\frac{n^2}{b^2}(bx_0 + 1)e^{-bx_0}.$$

Подстановка в (d) дает

$$z = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{n^2}{b^2}[bx + 1 - (bx_0 + 1)e^{b(x-x_0)}].$$

Так как для рассматриваемого размаха элементарное перемещение точки за время dt есть $dx<0$, то, извлекая корень и разделяя переменные, имеем

$$-\frac{dx}{\sqrt{bx + 1 - (bx_0 + 1)e^{b(x-x_0)}}} = \frac{n}{b}dt.$$

Интегрируем от $t = 0$ до t:

$$\int_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{bx + 1 - (bx_0 + 1)e^{b(x-x_0)}}} = \frac{n}{b}t.$$

Для вычисления квадратуры и установления явного выражения закона движения $x = x(t)$ здесь необходимо применить специальные приближенные методы.

§ 25. Криволинейное движение точки. Центральные силы

1. Естественные уравнения движения точки. При криволинейном движении точки приходится пользоваться дифференциальными уравнениями движения в проекциях на оси декартовых (уравнения (21 — 2)), цилиндрических (уравнения (21 — 3)) или других криволинейных координат. Наряду с этим часто оказывается удобным брать так называемые *естественные* уравнения движения, получающиеся проектированием основного уравнения динамики

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}$$

на оси естественного трехгранника траектории. Вспоминая, что проекции ускорения на касательную $\boldsymbol{\tau}$, главную нормаль $\boldsymbol{n}$ и бинормаль $\boldsymbol{b}$ будут соответственно:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0,$$

находим естественные уравнения движения точки в виде:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b. \tag{1}$$

Последнее уравнение говорит о том, что при движении материальной точки ее траектория принимает такой вид, что в каждой ее точке вектор силы, как и вектор ускорения, оказывается лежащим в соприкасающейся плоскости.

Уравнения (1) часто называются еще уравнениями Эйлера.

В уравнениях (1), как и при составлении проекций ускорения на оси естественного трехгранника, орт $\boldsymbol{\tau}$ нужно считать направленным по скорости $\boldsymbol{v}$ точки, а орт $\boldsymbol{n}$ — по главной нормали в сторону вогнутости траектории.

Пример. Требуется найти *первую космическую скорость*, то есть ту скорость, которую нужно сообщить материальной точке, чтобы она стала спутником Земли, вращающимся по круговой орбите некоторого радиуса r_0.

В этом случае $F_\tau = 0$, $F_n = \frac{\mu m}{r^2}$ — силе земного притяжения. Уравнения (1) дают:

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{v^2}{r_0} = \frac{\mu}{r_0^2},$$

следовательно,

$$v = \text{const} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}.$$

Но согласно (23 — 15) $\mu = R^2 g$, поэтому

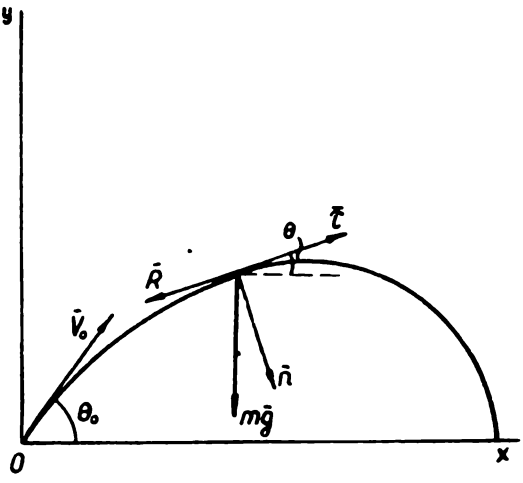
$$v = \sqrt{\frac{R^2 g}{r_0}}.$$

На поверхности Земли $r_0 = R$ и $v = \sqrt{Rg}$. Подставляя значение R и g, находим, что первая космическая скорость на поверхности Земли будет

$$v = \sqrt{6370 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81} \approx 7900 \text{ м/сек} = 7{,}9 \text{ к.м/сек}.$$

При большей скорости спутник будет вращаться по эллиптической орбите, все более вытянутой по мере роста скорости, а когда начальная скорость спутника достигнет второй космической скорости, он уйдет из-под действия силы земного притяжения и перестанет быть спутником Земли.

2. Движение тяжелой материальной точки в сопротивляющейся среде. Пусть материальная точка с массой m брошена с начальной скоростью v_0 под углом θ_0 к горизонту (фиг. 102). Тогда на точку будут действовать вертикальная сила тяжести mg и сила сопротивле-



Фиг. 102.

ния среды $\boldsymbol{R}$, направленная по касательной к траектории противоположно вектору скорости точки. Так как эти силы в любой момент времени лежат в одной вертикальной плоскости с вектором скорости v, то траектория точки будет плоской кривой. Примем эту вертикальную плоскость за плоскость (xy), направляя ось y вертикально вверх, а ось x — горизонтально в направлении движения точки. Начало координат берем в начальном положении точки.

Будем считать силу сопротивления зависящей только от скорости точки, полагая для величины этой силы

$$R = mgf(v).$$

Как известно, для плоской кривой орт $\boldsymbol{n}$ окажется лежащим в плоскости кривой. Переменный угол вектора скорости с осью x обозначим через Θ. Тогда из чертежа задачи видим, что естественные уравнения движения точки будут

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\Theta - mgf(v),\quad m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\Theta$$

или по сокращении на m:

$$\frac{dv}{dt} = -g\,[\sin\Theta + f(v)],\quad \frac{v^2}{\rho} = g\cos\Theta.$$

Сила тяжести создает нормальное ускорение, заставляющее вектор скорости, по мере движения точки по ее траектории, непрерывно поворачиваться по часовой стрелке (от оси y к оси x). Поэтому при движении точки угол Θ монотонно убывает, и для кривизны траектории будем иметь

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\Theta}{ds} = -\frac{d\Theta}{dt}\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{v}\frac{d\Theta}{dt},$$

так что уравнения движения точки можно переписать в виде:

$$\frac{dv}{dt} = -g\,[\sin\Theta + f(v)],\ v\frac{d\Theta}{dt} = -g\cos\Theta.$$

Разрешая эти уравнения относительно dt, имеем

$$dt = -\frac{dv}{g\,[\sin\Theta + f(v)]},\quad dt = -\frac{v\,d\Theta}{g\cos\Theta}. \qquad \text{(a)}$$

Отсюда

$$\frac{dv}{\sin\Theta + f(v)} = \frac{v\,d\Theta}{\cos\Theta},$$

что дает уравнение

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{d\Theta} = \operatorname{tg}\Theta + \frac{f(v)}{\cos\Theta}.$$

Если функция $f(v)$ известна, то интегрированием этого уравнения при заданных v_0 и Θ_0 найдем зависимость

$$v = \psi(\Theta). \qquad \text{(b)}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (a), получаем

$$dt = -\frac{1}{g}\frac{\psi(\Theta)}{\cos\Theta}\,d\Theta, \qquad \text{(c)}$$

откуда

$$t = -\frac{1}{g}\int_{\Theta_0}^{\Theta}\frac{\psi(\Theta)}{\cos\Theta}\,d\Theta. \qquad \text{(d)}$$

Для дифференциалов координат и пути s точки имеем $dx = v_x dt = v\cos\Theta\,dt$, $dy = v_y dt = v\sin\Theta\,dt$, $ds = vdt$, что на основании (b) и (c) можно переписать в форме:

$$dx = -\frac{1}{g}[\psi(\Theta)]^2\,d\Theta,\quad dy = -\frac{1}{g}[\psi(\Theta)]^2\operatorname{tg}\Theta\,d\Theta,$$

$$ds = -\frac{1}{g}\frac{[\psi(\Theta)]^2}{\cos\Theta}\,d\Theta.$$

Интегрирование этих выражений дает:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{g}\int_{\Theta_0}^{\Theta}[\psi(\Theta)]^2\,d\Theta,\quad y = -\frac{1}{g}\int_{\Theta_0}^{\Theta}[\psi(\Theta)]^2\operatorname{tg}\Theta\,d\Theta,\\ s &= \frac{1}{g}\int_{\Theta_0}^{\Theta}\frac{[\psi(\Theta)]^2}{\cos\Theta}\,d\Theta. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

Зная функцию (b), мы по формулам (d) и (e) найдем t, x, y и s как функции параметра Θ, установив тем самым зависимость x, y и s от времени t, что означает установление закона движения точки как в декартовых координатах, так и по траектории.

Изложенный метод дает общую идею решения основной задачи внешней баллистики о движении центра тяжести снаряда в воздушной среде. Формулы типа (d) и (e) позволяют составить так называемые баллистические таблицы, а затем по полученным в этих таблицах точкам — построить траекторию движения снаряда. Однако в баллистике дело обстоит значительно сложнее, ибо функция $f(v)$ только в некоторых простейших случаях может быть представлена приближенной аналитической формулой; кроме того, сила сопротивления зависит не только от скорости снаряда, но также и от координаты y, ибо плотность воздуха, а следовательно, и его сопротивление существенно зависят от высоты полета снаряда.

3. Центральные силы. Формула Бинэ. Рассмотрим подробнее движение материальной точки, находящейся под действием центральной силы. Как мы видели (§ 22, п. 2), в этом случае справедлива теорема площадей, говорящая о том, что траектория точки будет плоской кривой, а радиус-вектор точки, имеющей начало в центре силы, будет в равные промежутки времени описывать равные площади.

Второе свойство движения может быть выражено в полярных координатах, взятых в плоскости движения с началом в центре силы, в виде интеграла площадей (22 — 10):

$$r^2\dot{\varphi} = c. \tag{2}$$

Эта формула позволяет связать скорость точки с ее положением на траектории. Для квадрата скорости имеем выражение

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

Подставляя сюда $\dot{\varphi}$ из (2), находим

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}. \tag{a}$$

Введем вместо r новую переменную

$$u = \frac{1}{r}. \tag{b}$$

Тогда уравнение траектории точки $r = r(\varphi)$ представится в форме

$$u = u(\varphi),$$

откуда

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}.$$

Так как

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi},$$

то, сравнивая с предыдущим выражением, получаем

$$\dot{r} = -c\frac{du}{d\varphi}. \tag{c}$$

Используя выражения (b) и (c), находим из (a)

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]. \tag{3}$$

Аналогичную связь можно установить и для силы, действующей на точку. Пусть F — величина центральной силы. Тогда уравнение движения точки в проекции на ее радиус-вектор запишется в виде

$$mw_r = \pm F, \tag{d}$$

где знак плюс отвечает силе отталкивания, а минус — силе притяжения. Как известно из кинематики, радиальное ускорение будет

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2.$$

Но согласно (c) и (2)

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -c\frac{d^2u}{d\varphi^2}\dot{\varphi} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -c^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2},$$

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{r^3} = c^2u^3.$$

Поэтому

$$w_r = -c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right).$$

Подставляя это выражение в (d), находим

$$mc^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = \mp F. \tag{4}$$

где верхний знак отвечает силе отталкивания, нижний — силе притяжения. Это уравнение носит название *формулы Бинэ*; иногда его называют второй формулой Бинэ, а равенство (3) — первой формулой Бинэ.

Формулы (3) и (4) имеют важное значение, позволяя по известному уравнению траектории находить скорость точки и действующую на нее центральную силу. Наоборот, зная скорость или силу, мы получаем дифференциальное уравнение, интегрируя которое, найдем уравнение траектории точки. Таким образом, в данном случае траектория точки может быть определена без предварительного нахождения закона движения точки.

Рассмотрим еще частный случай, когда сила F зависит только от расстояния r от центра силы. Тогда, как мы знаем, центральная сила имеет согласно (23 — 11) потенциал

$$U = \pm\int F dr,$$

где опять верхний знак соответствует силе отталкивания а нижний — силе притяжения. Отсюда имеем

$$F = \pm\frac{dU}{dr} = \pm\frac{dU}{du}\frac{du}{dr} = \mp\frac{1}{r^2}\frac{dU}{du} = \mp u^2\frac{dU}{du},$$

и формула Бинэ при подстановке этого выражения принимает вид

$$mc^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = \frac{dU}{du}. \tag{5}$$

Беря затем интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} = U + h$$

и приравнивая получающееся отсюда выражение

$$v^2 = \frac{2}{m}(U + h)$$

его значению по (3), находим

$$\frac{2}{m}(U + h) = c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right],$$

откуда

$$\frac{du}{d\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2}{mc^2}(U + h) - u^2}.$$

В то же время согласно (2)

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}\frac{du}{dt} = \frac{1}{cu^2}\frac{du}{dt}.$$

Приравнивая эти два значения производной, находим

$$\frac{du}{dt} = \pm u^2\sqrt{\frac{2}{m}(U + h) - c^2u^2},$$

или

$$dt = \pm\frac{du}{u^2\sqrt{\frac{2}{m}(U + h) - c^2u^2}}. \qquad (6)$$

Зная функцию $U(u)$, можем проинтегрировать это уравнение и тем самым получить связь u (то есть r) со временем.

Знак в (6) выбирается в соответствии с тем, растет или убывает с течением времени величина u на данном участке траектории.

Пример. Определить траекторию точки, движущейся под действием центральной силы, проекция которой на радиус-вектор в натуральную величину равна

$$F = 2amc^2\frac{\cos\varphi}{r^2}.$$

В начальный момент $r = r_0$, $\varphi = 0$, а скорость имеет величину v_0 и направлена перпендикулярно к r_0 в сторону возрастания полярного угла φ.

Записывая силу в виде

$$F = -2amc^2u^2\cos\varphi$$

и подставляя в формулу Бинэ (4), приходим к уравнению

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 2a\cos\varphi. \qquad (a)$$

Частное решение ищем в форме

$$u = \alpha\varphi\sin\varphi.$$

Для второй производной будем иметь

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 2\alpha\cos\varphi - \alpha\varphi\sin\varphi.$$

Подставляя эти выражения в (а), находим

$$\alpha = a.$$

Добавляя еще решение однородного уравнения, получаем общее решение дифференциального уравнения (a):

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi + a\varphi\sin\varphi. \qquad \text{(b)}$$

Для определения произвольных постоянных A и B обращаемся к начальным условиям. Подстановка в (b) этих условий дает

$$A = u_0,$$

так что

$$A = \frac{1}{r_0}.$$

Для определения B воспользуемся тем, что по условию радиальная скорость в начальный момент равна нулю, то есть, что $\dot{r}_0 = 0$. А так как, как мы видели,

$$\dot{r} = -c\frac{du}{d\varphi},$$

что имеем условие

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = 0.$$

Согласно же (b)

$$\frac{du}{d\varphi} = (-A + a)\sin\varphi + (B + a\varphi)\cos\varphi,$$

что при подстановке в предыдущее условие дает

$$B = 0.$$

Внося полученные значения A и B в (b), получаем уравнение траектории точки

$$u = \frac{1}{r_0}\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi$$

или

$$r = \frac{r_0}{\cos\varphi + ar_0\varphi\sin\varphi}.$$

Очевидно, что полученная траектория имеет асимптоту с уравнением

$$\varphi\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{ar_0}.$$

Возникновение этой асимптоты при любой начальной скорости объясняется тем, что после перехода точкой луча $\varphi = \pi/2$ сила F меняет знак, становясь силой отталкивания, которая и удаляет точку в бесконечность.

4. Движение точки под действием силы всемирного тяготения. Рассмотрим движение материальной точки под действием силы притяжения к неподвижному центру по закону всемирного тяготения, то есть, когда величина силы обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра. Мы видели, что эта сила имеет потенциал (§ 23, п. 4)

$$U = \frac{\mu m}{r} = \mu m u.$$

Подставляя это выражение в (5) и деля его на mc^2, приходим к уравнению

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}.$$

Так как решение однородного уравнения можно взять в виде

$$u_1 = \alpha \cos(\varphi - \beta),$$

а частное

$$u_2 = \frac{\mu}{c^2},$$

то общее решение данного уравнения будет

$$u = \frac{\mu}{c^2} + \alpha \cos(\varphi - \beta),$$

где α и β — постоянные интегрирования.

Вводя обозначение

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \tag{7}$$

можем переписать полученное решение в форме

$$u = \frac{1 + e\cos(\varphi - \beta)}{p}, \tag{а}$$

где произвольными постоянными будут e и β.

Вспомним, что фокальное уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где

$$p = \frac{b^2}{a} \tag{8}$$

есть параметр эллипса или гиперболы, e — эксцентриситет, начало координат находится в одном из фокусов, а полярная ось направлена к ближайшей вершине, находящейся на большой оси кривой. Отсюда для обратной величины имеем

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\varphi}{p}. \tag{9}$$

Видим, что при $\beta = 0$, то есть при соответствующем выборе полярной оси, уравнение (а) совпадает с уравнением (9). Таким образом, в данном случае материальная точка будет двигаться по кривой второго порядка (по коническому сечению) с эксцентриситетом e и параметром p, причем один из фокусов этой кривой будет находиться в центре силы.

Значение e, а следовательно, и вид кривой будут определяться начальными условиями движения. Дифференцируя (9), имеем для начального момента

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = -\frac{e}{p}\sin\varphi_0$$

и из того же уравнения

$$u_0 - \frac{1}{p} = \frac{e}{p}\cos\varphi_0.$$

Возвышая эти равенства в квадрат и складывая, находим

$$e^2 = p^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0^2 + \left(u_0 - \frac{1}{p}\right)^2\right]. \qquad \text{(b)}$$

Из уравнения (3) имеем

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0^2 = \frac{v_0^2}{c^2} - u_0^2.$$

Подставляя, можем переписать (b) в виде

$$e^2 = p^2\left[\frac{v_0^2}{c^2} - u_0^2 + \left(u_0 - \frac{1}{p}\right)^2\right] = 1 + \frac{p^2 v_0^2}{c^2} - 2pu_0.$$

Внесим значение p по (7)

$$e^2 = 1 + \frac{c^2}{\mu^2}v_0^2 - \frac{2c^2}{\mu}u_0 = 1 + \frac{c^2}{\mu^2}(v_0^2 - 2\mu u_0).$$

Выразим еще u_0 через r_0 и вынесем общий множитель $2/m$

$$e^2 = 1 + \frac{c^2}{\mu^2}\left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right) = 1 + \frac{2}{m}\frac{c^2}{\mu^2}E, \qquad \text{(c)}$$

где

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{\mu m}{r_0} = \frac{mv_0^2}{2} + V_0$$

есть полная энергия точки, определенная по начальным условиям движения.

Из (c) следует, что траектория материальной точки будет:

эллипсом, если $v_0^2 < \dfrac{2\mu}{r_0}$ или $E < 0$,

параболой, если $v_0^2 = \dfrac{2\mu}{r_0}$ или $E = 0$,

гиперболой, если $v_0^2 > \dfrac{2\mu}{r_0}$ или $E > 0$.

Постоянная μ характеризует мощность притягивающего центра. Прилагая изложенные результаты к нашей солнечной системе, мы должны считать $\mu = \text{const}$, ибо эта величина, называемая *гауссовой постоянной*, связана с одним и тем же притягивающим центром — с Солнцем. Таким образом, траектории тел Солнечной системы, называемые в небесной механике *орбитами*, будут кривыми второго порядка, в одном из фокусов которых находится Солнце. Этот вывод является, однако, лишь первым приближением к действительности, ибо для определения точного вида орбиты какой-либо планеты или кометы необходимо учесть еще влияние на нее других тел Солнечной системы.

5. Законы Кеплера. Еще в начале XVII в. Кеплер, обработав результаты многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге, установил свои три закона, лежащие в основе небесной механики. Эти законы касаются движения планет и комет Солнечной системы и состоят в следующем:

1) все планеты и кометы описывают вокруг Солнца плоские орбиты, следуя закону площадей;

2) эти орбиты суть конические сечения, в одном из фокусов которого находится Солнце;

3) квадраты звездных времен обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Кеплер, однако, не мог установить какой-либо всеобъемлющей точки зрения на движение небесных тел, позволившей бы ему дать доказательство своих законов. Это было сделано значительно позднее Ньютоном, открывшим закон всемирного тяготения.

Первый закон Кеплера есть простое следствие теоремы площадей, имеющей здесь место в силу того, что каждая планета и комета движется под действием центральной силы притяжения ее Солнцем.

Доказательством второго закона служит проведенное нами в предыдущем пункте изучение движения точки, находящейся под действием силы притяжения к неподвижному центру по закону всемирного тяготения.

Легко доказать также и третий закон. В самом деле, из (7) и (8) имеем

$$c^2 = \mu p = \frac{\mu b^2}{a}.$$

А так как радиус-вектор точки в единицу времени описывает равные площади, то c, как удвоенная секториальная скорость, может быть найдена путем деления удвоенной площади эллипса на время T обращения планеты, то есть

$$c = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Следовательно,

$$\frac{\mu b^2}{a} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2},$$

откуда

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

6. Общее выражение закона всемирного тяготения. Закон всемирного тяготения состоит в том, что всякое тело с массой M притягивает к себе другое тело, имеющее массу m, с силой

$$F_1 = \frac{\mu m}{r^2}.$$

Обратно, второе тело действует на первое с силой притяжения

$$F_2 = \frac{\lambda M}{r^2}.$$

Здесь μ и λ — гауссовы постоянные для первого и второго тел соответственно, а r — расстояние между телами.

По закону равенства действия и противодействия

$$F_1 = F_2,$$

откуда

$$\mu m = \lambda M$$

или

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = f = \text{const}. \qquad \text{(а)}$$

Таким образом, отношение гауссовой постоянной какого-либо тела к его массе есть величина постоянная для всех тел природы.

Подставляя значения гауссовых постоянных из (а) в выражения для F_1 и F_2, находим, что общее значение силы всемирного тяготения, действующей на каждое из двух тел, есть

$$F = f\frac{Mm}{r^2}.$$

Таким образом, закон всемирного тяготения можно сформулировать следующим образом:

Любые два материальных тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Коэффициент f называется *гравитационной постоянной*. Она является размерной величиной, и ее численное значение в системе *CGS* есть

$$f = 6{,}685 \cdot 10^{-8} \frac{см^3}{г \cdot сек^2}.$$

7. Движение с тягой в поле силы всемирного тяготения. Пусть материальная точка массы m движется под действием силы всемирного тяготения, притягивающей точку к неподвижному центру O, и силы тяги, имеющей постоянную величину mQ и направленной вдоль радиуса-вектора, исходящего из O. Такая тяга может создаваться, например, каким-либо реактивным двигателем. Тогда точка окажется находящейся под действием центральной силы, проекция которой на радиус-вектор в натуральную величину равна

$$F = -\frac{\mu m}{r^2} + mQ.$$

Так как такая сила имеет потенциал

$$U = \int F dr,$$

то есть

$$U = m\left(\frac{\mu}{r} + Qr\right),$$

то можем воспользоваться интегралом энергии

$$\frac{mv^2}{2} = U + h'.$$

Подставляя сюда U и сокращая на m, приходим к равенству

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{r} + Qr + h, \tag{a}$$

где h — постоянная интегрирования.

Заменяя $\dot{\varphi}$ из интеграла площадей

$$r^2\dot{\varphi} = c,$$

можем квадрат скорости точки представить в виде

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}. \tag{b}$$

Подставляя это выражение в (a), находим из него

$$\dot{r}^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + Qr + h\right) - \frac{c^2}{r^2}.$$

Умножая обе части этого равенства на r^2, извлекая корень из обеих частей и разделяя переменные, приходим к соотношению

$$dt = \pm \frac{r\,dr}{\sqrt{2(Qr^3 + hr^2 + \mu r) - c^2}}, \tag{c}$$

где знак плюс отвечает тем моментам времени, в которые радиус-вектор точки возрастает ($dr > 0$), минус, — в которые он убывает ($dr < 0$).

Пусть в начальный момент $t = 0$ $r = r_0$. Тогда интегрирование (c) дает

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{\pm r\,dr}{\sqrt{2(Qr^3 + hr^2 + \mu r) - c^2}}. \tag{d}$$

Обращая это выражение, то есть найдя из него зависимость $r = r(t)$, можем подставить ее в равенство

$$d\varphi = \frac{c}{r^2}\,dt. \tag{e}$$

Интегрируя это соотношение, считая $\varphi = 0$ при $t = 0$, получим

$$\varphi = c\int_0^t \frac{dt}{r^2(t)}. \tag{f}$$

Выражение (f) совместно с (d) определяет закон движения точки. Подставляя dt из (c) в (f), будем иметь

$$\varphi = c\int_{r_0}^{r} \frac{\pm\, dr}{r\sqrt{2(Qr^3 + hr^2 + \mu r) - c^2}}. \tag{g}$$

Эта связь между координатами точки r и φ представляет собой уравнение траектории точки

Заметим, что входящие в (d) и (g) интегралы являются эллиптическими интегралами второго и третьего рода соответственно. Обращение этих интегралов достаточно сложно, и мы рассмотрим далее приближенное решение задачи, справедливое для достаточно больших r.

В этом случае в подкоренном выражении формул (d) и (g) можно пренебречь членами с первой и нулевой степенями r по сравнению с двумя другими. Как показывают подсчеты, например, для ракеты, запущенной с Земли, это можно сделать, начиная со значений r, лишь в два-три раза превышающих радиус Земли (мы предполагаем при этом, что массу ракеты можно считать постоянной). Тогда формулы (d) и (g) при движении точки от притягивающего центра примут вид:

$$\begin{aligned} t &= \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2(Qr + h)}}, \\ \varphi &= c\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{2(Qr + h)}}. \end{aligned} \tag{h}$$

При таком приближении влияние силы притяжения сказывается лишь через постоянную h, определяемую из начальных условий по формуле (a).

Уравнения (h) легко интегрируются подстановкой $Qr + h = z^2$. В результате (при $h < 0$) получим

$$t = \frac{\sqrt{2}}{Q}\left(\sqrt{Qr + h} - \sqrt{Qr_0 + h}\right),$$

$$\varphi = -\frac{c}{h\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{Qr + h}}{r} - \frac{\sqrt{Qr_0 + h}}{r_0} - \frac{Q}{h}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{Qr + h}{-h}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{Qr_0 + h}{-h}}\right)\right].$$

Разрешая первое уравнение относительно r, находим

$$r = r_0 + \sqrt{2(Qr_0 + h)}\, t + \frac{1}{2} Q^2 t^2,$$

что вместе с выражением (f) даст закон движения точки.

При $h > 0$ результат вычисления интеграла во втором выражении (h) будет иным, и траектория точки будет иметь другой вид.

Глава 2

ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 26. Общие сведения. Движение по поверхности

1. Несвободная материальная точка. Связи и их классификация. До сих пор мы рассматривали движение свободной материальной точки, когда для движущейся точки не существовало никаких препятствий или ограничений. Перейдем теперь к изучению движения несвободной материальной точки, то есть точки, движение которой ограничено некоторыми преградами или препятствиями, называемыми, как мы говорили ранее, связями.

Связи могут носить чисто геометрический характер, устанавливая то геометрическое протяжение (объем, поверхность, линия), в котором может двигаться точка. Поэтому такие связи называются *геометрическими* или *конечными*, а по терминологии, предложенной Герцем, их называют еще *голономными*.

Могут существовать также связи другого типа, налагающие ограничения на скорость точки. Эти связи называются *кинематическими*, *дифференциальными* или *неголономными*. В динамике точки мы ограничимся рассмотрением движения несвободной точки, подчиненной только голономным связям.

Голономные связи налагают ограничения на возможные положения движущейся точки. Аналитически это можно выразить в виде некоторых условий, налагаемых на координаты точки. Эти условия называются *уравнениями связей*.

Для дальнейшего мы будем предполагать, что функции, входящие в эти уравнения, дифференцируемы по своим аргументам по крайней мере дважды.

Связи могут быть проклассифицированы и по другим признакам. Так, связи можно разделить на связи *постоянные*, *стационарные* или *склерономные* и связи *переменные*, *нестационарные* или *реономные*. К первого типа связям от-

носятся те, которые остаются неподвижными и не меняют своего вида во все время движения точки, ко второму же типу — подвижные или деформирующиеся связи. Различие в уравнениях этих связей будет, очевидно, состоять в том, что в уравнения нестационарных связей будет входить явно время t, а в уравнениях стационарных связей оно будет отсутствовать. Например, если точка вынуждена двигаться по некоторой неподвижной поверхности

$$f(x, y, z) = 0,$$

то координаты точки во все время движения будут удовлетворять этому уравнению, и последнее явится уравнением этой склерономной связи. Если же поверхность деформируется или движется, то она будет реономной связью, и время t войдет в коэффициенты этого уравнения, получающего общий вид

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Так, если точка движется по поверхности неподвижной сферы постоянного радиуса a, то эта связь будет склерономной с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Если же, например, радиус сферы с течением времени деформируется по линейному закону, то координаты движущейся точки должны удовлетворять уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a + bt)^2 = 0,$$

и связь окажется реономной. Точно так же, если координаты точки удовлетворяют одновременно двум уравнениям

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad z - a \sin t = 0,$$

то такая связь тоже будет реономной. В этом случае точка будет двигаться по окружности, лежащей на поверхности сферы и меняющей свое положение и свой радиус по закону гармонического колебания.

Можно указать еще одно деление связей. Именно, с одной стороны, существуют связи, которым точка оказывается подчиненной во все время движения. Такие связи называются *удерживающими* или *неосвобождающими*. Аналитические условия, налагаемые такими связями на координаты точки, выражаются некоторыми равенствами, так что все вышезаписанные уравнения связей одновременно являются общим видом или примерами уравнений удерживающих связей.

С другой же стороны, могут иметь место такие связи, которые являются границами той области, в которой движется материальная точка. В этом случае точка будет ис-

пытывать действие связи только в отдельные моменты или промежутки времени, когда точка приходит на связь или, как говорят, когда связь *крепнет*. Когда же точка сходит со связи, то есть когда связь *ослабевает*, то точка совсем не будет испытывать действия данной связи. Такие связи называются *неудерживающими* или *освобождающими*. Так как всякая функция координат точки, равная нулю на рассматриваемой границе, при сходе с нее точки принимает определенный знак (при условии неравенства нулю градиента функции), то уравнения неудерживающих связей имеют вид неравенств. Так, если неудерживающая связь представляет собой некоторую поверхность

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

то уравнение связи для точки будет

$$f(x, y, z, t) \geqslant 0$$

или

$$f(x, y, z, t) \leqslant 0,$$

смотря по тому, сходит ли точка со связи в область, где $f > 0$, или в область, где $f < 0$. При этом знак равенства будет отвечать тем моментам времени, в которые связь крепнет.

Если, например, материальная точка подвешена к неподвижной точке с помощью гибкой нерастяжимой нити длиною l, то она может или двигаться по сфере радиуса l или сходить внутрь этой сферы. Помещая начало координат в неподвижном конце нити, видим, что уравнение этой неудерживающей связи будет

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leqslant 0.$$

Так как три поверхности, из которых ни одна не проходит через линию пересечения двух других, могут пересекаться лишь в одной или нескольких изолированных точках, то при трех независимых уравнениях удерживающих связей материальная точка может находиться только в одной из этих точек пересечения и поэтому будет лишена всякой свободы движения. Следовательно, для одной точки число уравнений удерживающих связей не может быть больше двух. Наоборот, число уравнений неудерживающих связей может быть любым, ибо границы области движения точки могут состоять из любого числа поверхностей или линий, имеющих свои отдельные уравнения; при этом одна или две связи могут быть удерживающими. Например, если точка может двигаться только по поверхности первого октанта шара, то уравнения связей будут:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

Удерживающие связи обладают тем свойством, что каждому элементарному перемещению точки, согласному со связью, соответствует, как возможное, прямо противоположное тоже согласное со связью перемещение. Неудерживающие же связи этим свойством не обладают, ибо всякая такая связь, как преграждающая выход точки из определенной области, позволяет точке сходить с нее лишь в одну сторону, именно ту, откуда точка может прийти на связь. По этой причине удерживающие связи иногда называют еще *двусторонними*, а неудерживающие—*односторонними*.

При голономных связях число независимых координат точки называется числом степеней свободы точки. У свободной материальной точки ее три координаты не связаны никакой зависимостью, поэтому такая точка имеет три степени свободы. Если же координаты точки должны удовлетворять одному или двум уравнениям удерживающих связей, то число независимых координат уменьшается до двух или одной. Следовательно, при движении точки по поверхности (одно уравнение связи) она имеет две степени свободы, а при движении по линии (два уравнения связей)—одну степень свободы. То же самое относится и к неудерживающим связям для тех моментов времени, в которые связь крепнет; когда же такая связь ослабевает, то она не имеет никакого значения для движения точки, и, если нет какой-либо другой связи, точка будет двигаться как свободная.

В дальнейшем мы рассмотрим два основных вида несвободного движения материальной точки: движение по поверхности и движение по линии.

2. Векторное уравнение движения несвободной материальной точки. Как мы видели в §16, при рассмотрении движения любой несвободной системы можно применить аксиому связей. По этой аксиоме удерживающую связь, а также неудерживающую для моментов пребывания точки на связи можно заменить особой силой, называемой реакцией связи, и считать далее точку свободной, движущейся под действием обычных активных сил и реакции данной связи.

Таким образом, векторное уравнение движения несвободной материальной точки может быть взято в виде

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{F}$ — равнодействующая активных сил, действующих на точку, а $\boldsymbol{R}$ — реакция связи, то есть некоторой поверхности или линии, по которой вынуждена двигаться точка. Как указывалось ранее, реакция связи заранее не дана и поэтому она относится к числу тех неизвестных, которые нужно определить в ходе решения данной задачи. При этом в частных случаях движения можно сделать определенные

предположения о характере реакции, облегчающие ее нахождение.

3. Движение точки по поверхности. Будем сначала рассматривать движение точки по поверхности.

Действие связи на материальную точку, как и на любое тело, состоит в том, что она, во-первых, противодействует оказываемому точкой давлению, а во-вторых, тормозит движение точки по ней вследствие шероховатости и некоторой деформации соприкасающихся поверхностей. Таким образом, реакцию поверхности можно считать имеющей две составляющих—нормальную реакцию $\boldsymbol{N}$ и силу трения $\boldsymbol{T}$. В динамике точки мы ограничимся только силой трения скольжения, как имеющей основное значение при движении тел друг по другу.

Пусть

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = 0 \tag{2}$$

есть уравнение связи. Обозначим через $\boldsymbol{n}$ орт нормали к этой поверхности, направленной в сторону возрастания функции f. Тогда нормальная реакция может быть записана в виде

$$\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{n},$$

где N есть алгебраическое значение нормальной реакции, равное проекции полной реакции $\boldsymbol{R}$ на орт $\boldsymbol{n}$. Очевидно, что если $\boldsymbol{R}$ направлена в область, где $f(x,\ y,\ z,\ t) > 0$, то $N > 0$, а если в область, где $f(x,\ y,\ z,\ t) < 0$, то $N < 0$.

Для установления удобного выражения для силы трения найдем предварительно условие, налагаемое связью на скорость точки. Беря полную производную по времени от обеих частей уравнения (2), получаем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

что иначе можно записать в виде

$$\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad} f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Так как $\operatorname{grad} f$ есть вектор, направленный по орту $\boldsymbol{n}$, то

$$\operatorname{grad} f = |\operatorname{grad} f|\ \boldsymbol{n},$$

и предыдущее равенство можно переписать в форме

$$v_n |\operatorname{grad} f| + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

где v_n — проекция скорости точки на нормаль $\boldsymbol{n}$.

Отсюда

$$v_n = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\frac{\partial f}{\partial t}. \qquad (3)$$

В силу того, что точка не может сойти с поверхности, полученное условие говорит о том, что скорость точки по нормали к поверхности равна скорости движения рассматриваемой реономной связи в том же направлении.

Так как точка движется по поверхности (2), то кроме составляющей $\boldsymbol{v}_n$ должна обязательно существовать составляющая скорости $\boldsymbol{v}_\tau$, касательная к поверхности, и

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{v}_\tau.$$

Составляющая $\boldsymbol{v}_\tau$ совершенно произвольна и может быть определена только в результате решения задачи механики. Эта составляющая в общем случае есть сумма двух векторов

$$\boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v}'_\tau + \boldsymbol{v}''_\tau,$$

где $\boldsymbol{v}'_\tau$ — скорость точки поверхности в касательном направлении, а $\boldsymbol{v}''_\tau$ — относительная скорость материальной точки в ее движении по поверхности.

Сила трения $\boldsymbol{T}$, как было установлено в статике, имеет величину

$$T = \kappa |N|,$$

где κ — коэффициент динамического трения. Как тормозящая движение, она направлена противоположно относительной скорости $\boldsymbol{v}''_\tau$. Если поэтому $\boldsymbol{\tau}$ есть орт касательной к относительной траектории точки, расположенной на поверхности, направленный в сторону $\boldsymbol{v}''_\tau$, то для вектора силы трения будем иметь

$$\boldsymbol{T} = -\kappa |N| \boldsymbol{\tau}.$$

Следовательно, реакция связи может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} = N\boldsymbol{n} - \kappa |N| \boldsymbol{\tau}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), мы находим векторное уравнение движения материальной точки по поверхности

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + N\boldsymbol{n} - \kappa |N| \boldsymbol{\tau}. \qquad (4)$$

4. Дифференциальные уравнения движения точки по поверхности в декартовых координатах. Найдем сначала дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на неподвижные оси декартовых координат. Если поверхность является реономной связью, то появляются некоторые трудности при проектировании вектора $\boldsymbol{\tau}$, ибо этот вектор будет двигаться вместе с по-

верхностью. Ограничимся ради простоты случаем склерономной связи, то есть рассмотрим движение точки по некоторой неподвижной поверхности

$$f(x, y, z) = 0. \tag{5}$$

В этом случае

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

и согласно (3) $v_n = 0$; равняется нулю также и $\boldsymbol{v}_e$ вследствие отсутствия всякого движения или деформации поверхности. Поэтому $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_r$, так что скорость точки будет направлена по касательной к поверхности, совпадая по направлению с ортом $\boldsymbol{\tau}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}.$$

Откуда

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}.$$

Учитывая, что

$$\boldsymbol{n} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|},$$

и вводя обозначение

$$\lambda = \frac{N}{|\operatorname{grad} f|}, \tag{6}$$

можем уравнение (4) переписать в виде

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \lambda \operatorname{grad} f - \kappa|\lambda \operatorname{grad} f| \frac{\boldsymbol{v}}{v}.$$

Отсюда находим дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси декартовых координат:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - \kappa|\lambda \operatorname{grad} f| \frac{\dot{x}}{v}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \kappa|\lambda \operatorname{grad} f| \frac{\dot{y}}{v}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \kappa|\lambda \operatorname{grad} f| \frac{\dot{z}}{v}. \end{aligned}\right| \tag{7}$$

В этих трех уравнениях имеется четыре искомых функции времени x, y, z, λ. Присоединяя сюда уравнение связи (5), получим необходимую систему четырех уравнений. Найдя λ, мы можем затем по (6) найти нормальную реакцию поверхности. Для определения произвольных постоянных, получающихся при интегрировании системы (7), должны быть заданы соответствующие начальные условия.

5. Движение тяжелой материальной точки по шероховатой наклонной плоскости. Пусть плоскость составляет с горизонтом угол β. Примем наклонную плоскость за плоскость (xy), направляя ось x горизонтально, а ось y — по линии наибольшего ската вниз; перпендикулярную к плоскости ось z направим вверх. В этих координатах уравнение наклонной плоскости будет

$$f \equiv z = 0. \tag{a}$$

Будем решать задачу с помощью уравнений (7). В силу (a) $\dot{z} = \ddot{z} = 0$, а

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1,$$

поэтому третье уравнение (7) принимает вид

$$0 = -mg\cos\beta + \lambda,$$

откуда

$$\lambda = mg\cos\beta.$$

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

то

$$|\operatorname{grad} f| = 1,$$

уравнение (6) дает $N = \lambda$, так что λ есть нормальная реакция плоскости.

Первые два уравнения (7), после подстановки значений полученных величин и сокращения на m, принимают вид

$$\ddot{x} = -\kappa g\cos\beta\,\frac{\dot{x}}{v},$$

$$\ddot{y} = g\sin\beta - \kappa g\cos\beta\,\frac{\dot{y}}{v}.$$

Введем обозначения:

$$g\sin\beta = \gamma,\quad \kappa g\cos\beta = b\gamma,$$

откуда

$$b = \kappa\operatorname{ctg}\beta. \tag{b}$$

Тогда уравнения движения перепишутся в виде

$$\ddot{x} = -b\gamma\frac{\dot{x}}{v},\quad \ddot{y} = \gamma\left(1 - b\frac{\dot{y}}{v}\right).$$

Введем угол φ скорости с осью x, полагая

$$\dot{x} = v\cos\varphi,\quad \dot{y} = v\sin\varphi. \tag{c}$$

Тогда

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt}\cos\varphi - v\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\ddot{y} = \frac{dv}{dt}\sin\varphi + v\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt},$$

и уравнения движения будут:

$$\frac{dv}{dt}\cos\varphi - v\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = -b\gamma\cos\varphi,$$

$$\frac{dv}{dt}\sin\varphi + v\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = \gamma(1 - b\sin\varphi).$$

Решая эти уравнения относительно производных, находим:

$$\frac{dv}{dt} = \gamma (\sin \varphi - b),$$

$$v \frac{d\varphi}{dt} = \gamma \cos \varphi. \tag{d}$$

Исключая dt, приходим к уравнению

$$\frac{dv}{v} = \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{b}{\cos \varphi} \right) d\varphi.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\ln v = - \ln \cos \varphi + b \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \ln (2C),$$

где C — произвольное постоянное. Отсюда имеем

$$v = \frac{2C}{\cos \varphi} \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right\}^b \tag{e}$$

Полагаем

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \eta.$$

Согласно соотношению

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

имеем

$$\cos \varphi = \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{2\eta}{1 + \eta^2}. \tag{f}$$

Поэтому выражение (e) принимает вид

$$v = C \eta^{b-1} (1 + \eta^2) = C (\eta^{b-1} + \eta^{b+1}). \tag{g}$$

Легко видеть также, что

$$\sin \varphi = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}, \tag{h}$$

что после дифференцирования и использования (f) дает

$$d\varphi = - \frac{2d\eta}{1 + \eta^2}. \tag{i}$$

Определяя dt из (d) и используя (f), (g) и (i), находим

$$dt = \frac{v d\varphi}{\gamma \cos \varphi} = - \frac{C}{\gamma} \eta^{b-2} (1 + \eta^2) \, d\eta, \tag{j}$$

откуда, интегрируя, имеем

$$t = - \frac{C}{\gamma} \left(\frac{\eta^{b-1}}{b-1} + \frac{\eta^{b+1}}{b+1} \right) + t_1, \tag{k}$$

где t_1 — произвольная постоянная.

Далее из уравнений (c), (i), (g), (h) и (j) получаем:

$$dx = v \cos \varphi \, dt = - \frac{2C^2}{\gamma} \eta^{2b-2} (1 + \eta^2) \, d\eta,$$

$$dy = v \sin\varphi\, dt = -\frac{C^2}{\gamma}\eta^{2b-3}(1-\eta^4)\, d\eta$$

Проинтегрировав эти выражения, находим:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{2C^2}{\gamma}\left(\frac{\eta^{2b-1}}{2b-1} + \frac{\eta^{2b+1}}{2b+1}\right) + x_1, \\ y &= -\frac{C^2}{\gamma}\left(\frac{\eta^{2b-2}}{2b-2} - \frac{\eta^{2b+2}}{2b+2}\right) + y_1, \end{aligned}\right\} \qquad (l)$$

где x_1, y_1—произвольные постоянные. При заданных начальных условиях выражения (k) и (l) определяют закон движения точки с помощью параметра η.

При $b > 1$, то есть, когда согласно (b)

$$\operatorname{tg}\beta < \kappa, \qquad (m)$$

скорость точки v, по (g), обращается в нуль при $\eta = 0$. По (κ) и (l), это произойдет в момент $t = t_1$ в положении точки $x = x_1$, $y = y_1$. В то же время неравенство (m) говорит о том, что угол β между силой тяжести и нормалью к плоскости меньше угла трения α (см. § 17, п. 2). Поэтому точка, остановившись в положении (x_1, y_1), не сможет двинуться дальше, и движение точки в момент $t = t_1$ прекратится.

Если же $\frac{1}{2} < b < 1$, то при $\eta = 0$ имеем $t = \infty$, $x = x_1$, $y = \infty$ Следовательно, в этом случае траектория точки имеет асимптоту, параллельную оси y, то есть направленную по линии наибольшего ската движение нигде не прекращается, ибо неравенство (m) изменяет знак.

Наконец, когда $b < \frac{1}{2}$, траектория безостановочно движущейся точки не будет иметь асимптоты.

6. Естественные уравнения движения точки. Пусть точка движется по неподвижной поверхности, описывая на ней некоторую траекторию AB. Орт касательной к траектории τ, направленный в сторону движения точки, одновременно будет касательным и к поверхности (фиг. 103). Орт нормали к поверхности n проведем так, как было указано ранее в п. 3. Наконец, возьмем третье направление, нормальное к предыдущим двум, характеризуемое ортом π, направленным в такую сторону, чтобы орты τ, n и π, взятые в таком порядке, образовывали бы правую систему.

Найдем уравнения движения точки в проекциях на эти три направления. Для этого вспомним, что ускорение точки можно представить в виде

$$w = \frac{dv}{dt}\tau + \frac{v^2}{\rho}\nu,$$

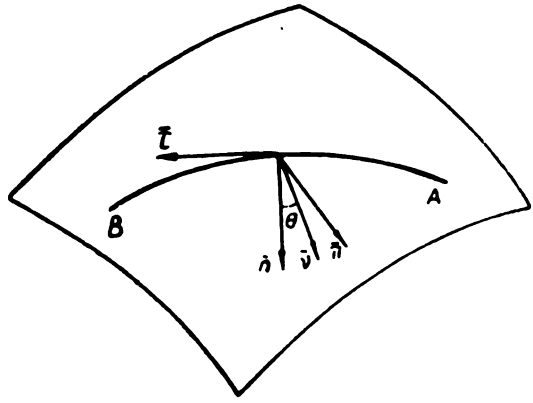
где ν—орт главной нормали к траектории, направленный в сторону ее вогнутости и лежащий в общей нормальной

плоскости с ортами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\pi}$. Тогда векторное уравнение движения материальной точки (4) можно переписать в форме

$$m\left(\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\nu}\right)=\boldsymbol{F}+N\boldsymbol{n}-\kappa|N|\boldsymbol{\tau}.$$

Обозначая через Θ угол между нормалями $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$, получим следующие уравнения в проекциях на орты $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\pi}$:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau-\kappa|N|,\\ m\frac{v^2}{\rho}\cos\Theta &= F_n+N,\\ m\frac{v^2}{\rho}\sin\Theta &= F_\pi \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$



Фиг. 103.

Эти уравнения называются *естественными уравнениями* движения точки по поверхности.

В частном случае движения точки по инерции, то есть в отсутствие активных сил, эти уравнения принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= -\kappa|N|,\\ m\frac{v^2}{\rho}\cos\Theta &= N,\\ m\frac{v^2}{\rho}\sin\Theta &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Из последнего уравнения следует, что $\sin\Theta=0$, откуда $\Theta=0$ или π. Следовательно, в этом случае главная нормаль

траектории окажется коллинеарной с нормалью к поверхности. Как известно, этим свойством обладают геодезические линии поверхности, вдоль которых расстояние между двумя точками будет кратчайшим по сравнению с любыми другими линиями, лежащими на поверхности. Таким образом, при движении точки по неподвижной поверхности в отсутствие активных сил траекторией точки будет одна из геодезических линий поверхности.

Второе уравнение (9) определит нормальную реакцию поверхности

$$N = \pm m \frac{v^2}{\rho},$$

где знак плюс отвечает случаю, когда орт нормали к поверхности $\boldsymbol{n}$ совпадает с ортом $\boldsymbol{\nu}$, то есть когда орт $\boldsymbol{n}$ направлен в сторону вогнутости нормального сечения поверхности соприкасающейся плоскостью, и знак минус—в противоположном случае.

Подставляя N в первое уравнение (9), получаем собственно дифференциальное уравнение движения точки по поверхности

$$\frac{dv}{dt} = -\kappa \frac{v^2}{\rho}.$$

Полагая здесь

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{v^2}{2},$$

имеем

$$d\frac{v^2}{2} = -2\kappa \frac{v^2}{2}\frac{ds}{\rho}.$$

Отсчитывая дуговую координату s от начала движения точки, в результате интегрирования этого уравнения находим

$$v^2 = v_0^2 e^{-2\kappa\psi(s)},$$

где

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\rho}.$$

Извлекая корень, получаем

$$v = v_0 e^{-\kappa\psi(s)}. \qquad \text{(а)}$$

Как видим, при движении точки по инерции вдоль шероховатой поверхности ее скорость будет непрерывно убывать.

Например, при движении точки по поверхности сферы радиуса R точка будет двигаться по дуге большого круга, как являющейся геодезической линией этой поверхности.

Так как для сферы радиус кривизны $\rho = R$, то уравнение (а) дает

$$v = v_0 e^{-\frac{\kappa s}{R}}.$$

Следовательно, движение точки никогда не прекратится, хотя скорость будет все время убывать. Это связано с тем, что нормальная реакция, а следовательно, и сила трения будут убывать пропорционально квадрату скорости.

7. Уравнения движения точки по идеально гладкой поверхности. В этом случае сила трения отсутствует, так что движущаяся материальная точка испытывает со стороны поверхности только нормальную реакцию. Такая связь, как мы говорили ранее, называется идеальной.

Полагая в уравнении (4) $\kappa = 0$, находим векторное уравнение движения точки по идеально гладкой поверхности в виде

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + N\boldsymbol{n}. \tag{10}$$

Так как мы теперь не связаны с затруднением, возникающим при проектировании орта τ в случае нестационарной связи, то можем, в общем случае, считать связь реономной, то есть можем допустить, что уравнение поверхности будет

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{11}$$

Повторяя далее те же рассуждения, что и при выводе уравнений (7), найдем, что дифференциальные уравнения движения точки по идеально гладкой поверхности в декартовых координатах имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где

$$\lambda = \frac{N}{|\operatorname{grad} f|},$$

причем

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Уравнения (12) называются *уравнениями Лагранжа в декартовых координатах* или *уравнениями Лагранжа*

первого рода. Как и в случае движения по шероховатой поверхности, эти уравнения рассматриваются совместно с уравнением связи (11); из этих четырех уравнений и могут быть найдены четыре функции времени x, y, z и λ.

Обычный путь решения какой-либо задачи будет следующий. Сначала исключают λ из уравнений (12). В полученных двух уравнениях одну из координат, например z, а также ее производные заменяют из уравнения поверхности (11) и из условий, налагаемых этим уравнением на $\dot{z}$ и $\ddot{z}$ и получающихся дифференцированием уравнения (11) по t. В результате интегрирования получающихся таким путем двух дифференциальных уравнений второго порядка находят координаты x, y в функции от времени и четырех произвольных постоянных. Подставляя эти выражения в уравнение (11), находят z в функции от тех же величин. Таким образом, общее решение будет иметь вид:

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4),$$
$$y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4),$$
$$z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4).$$

Как видим, для окончательного определения закона движения точки по поверхности необходимо иметь четыре начальных условия. Это находится в соответствии с тем фактом, что в данном случае материальная точка имеет две степени свободы. В самом деле, в силу уравнения (11) независимыми будут только две координаты точки.

Значения λ, а следовательно, и нормальной реакции $\boldsymbol{N}$ найдем затем из любого уравнения (12), используя полученный закон движения точки.

Естественные уравнения движения точки по идеально гладкой неподвижной поверхности получаются из уравнений (8), если положить в них $k = 0$; таким путем находим:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau, \\ m\frac{v^2}{\rho}\cos\Theta &= F_n + N, \\ m\frac{v^2}{\rho}\sin\Theta &= F_\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

При отсутствии активных сил опять имеем отсюда $\sin\Theta = 0$ и $\Theta = 0$ или π. Второе уравнение, принимающее вид

$$N = \pm m\frac{v^2}{\rho},$$

снова служит для определения нормальной реакции связи. Первое же уравнение будет

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

откуда $v = v_0 = \text{const}$. Таким образом, при движении точки по инерции по идеально гладкой поверхности точка движется по геодезической линии поверхности с постоянной скоростью.

8. Теорема кинетической энергии. Установим теорему кинетической энергии для несвободного движения точки по идеально гладкой поверхности. Так как в этом случае на материальную точку, помимо активной силы, действует еще нормальная реакция поверхности, то в дифференциальной форме теорема имеет вид

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Но

$$\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r} = \lambda \operatorname{grad} f\cdot d\boldsymbol{r}. \qquad \text{(а)}$$

В то же время, дифференцируя уравнение поверхности

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{dt}dt = \operatorname{grad} f\cdot d\boldsymbol{r} + \frac{\partial f}{dt}dt = 0.$$

Следовательно, выражение (а) можно переписать в форме

$$\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r} = -\lambda\frac{\partial f}{dt}dt,$$

и теорема кинетической энергии запишется следующим образом:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} - \lambda\frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

Отсюда следует, что если поверхность неподвижна, то есть связь склерономна, то

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

и теорема принимает вид

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r},$$

такой же, как и при движении свободной материальной точки. Поэтому если активные силы имеют потенциал, то бу-

дет существовать интеграл энергии. Таким образом, при консервативных силах интеграл энергии имеет место не только для свободного движения материальной точки, но также и для движения точки по идеально гладкой неподвижной поверхности.

Пример. Тяжелая материальная точка скатывается по поверхности гладкого параболического цилиндра $y^2 = 2px$, имея в начальный момент ординату $y_0 = 2p$ и скорость $v_0 = 0$. Определить точку срыва с поверхности, а также величину и направление скорости в этот момент, считая ось y направленной вертикально вверх.

Так как активной силой является только сила тяжести, то уравнения Лагранжа (12) будут:

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

где

$$f \equiv y^2 - 2px = 0. \tag{a}$$

Подставляя частные производные, имеем уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = -2p\lambda, \quad m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y, \quad m\ddot{z} = 0. \tag{b}$$

Последнее уравнение и начальное условие $v_0 = 0$ дают:

$$\dot{z} = C_1 = 0, \quad z = \text{const}.$$

Следовательно, точка будет совершать плоское движение, определяемое первыми двумя уравнениями (b) и уравнением связи (a).

Исключим λ из уравнений (b), для чего первое уравнение умножим на y, второе—на p, и сложим их друг с другом. После сокращения на m, получим

$$y\ddot{x} + p\ddot{y} = -pg. \tag{c}$$

Рассматриваем это уравнение совместно с (a). Из последнего имеем:

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad \dot{x} = \frac{y\dot{y}}{p}, \quad \ddot{x} = \frac{\dot{y}^2 + y\ddot{y}}{p}. \tag{d}$$

Подставляя последнее выражение в (c), находим

$$(p^2 + y^2)\ddot{y} + y\dot{y}^2 + p^2 g = 0. \tag{e}$$

В точке схода $N = 0$, что по (6) дает $\lambda = 0$, и из второго уравнения (b) имеем $\ddot{y} = -g$. Поэтому в точке схода получаем из (*e*) после сокращения на y условие:

$$\dot{y}^2 - gy = 0. \tag{f}$$

Сила тяжести имеет потенциал $U = -mgy$. А так как поверхность цилиндра идеально гладкая и неподвижна, то имеет место интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} = U + h' = -mgy + h',$$

откуда

$$v^2 = -2gy + h.$$

Из начальных условий $y_0 = 2p$, $v_0 = 0$ находим

$$h = 4pg,$$

следовательно,

$$v^2 = 2g(2p - y). \tag{g}$$

В то же время, используя второе выражение (d), имеем

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{y^2\dot{y}^2}{p^2} + \dot{y}^2 = \dot{y}^2\,\frac{p^2+y^2}{p^2}.$$

Приравнивая полученные два выражения для v^2 и решая полученное равенство относительно $\dot{y}^2$, получаем

$$\dot{y}^2 = \frac{2p^2g\,(2p-y)}{p^2+y^2}.$$

Подставляя это выражение в условие (f), находим, что для точки срыва справедливо равенство

$$2p^2g\,(2p-y) - (p^2+y^2)\,gy = 0,$$

что можно переписать в виде

$$y^3 + 3p^2y - 4p^3 = 0.$$

Это уравнение имеет очевидный корень $y_1 = p$. Легко видеть, что два других корня будут комплексными. Следовательно, этот корень и определяет ординату точки срыва. Из уравнения (a) находим абсциссу этой точки

$$x_1 = \frac{p}{2}.$$

Из (g) определим величину скорости в точке срыва

$$v = \sqrt{2pg}.$$

Из уравнения (a) получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

и, следовательно, в точке срыва

$$\frac{dy}{dx} = 1,$$

так что скорость направлена вниз по касательной, составляющей угол в 45° с осью x.

9. Два случая движения точки по идеально гладкой поверхности вращения. В некоторых случаях задачу о движении материальной точки по неподвижной идеально гладкой поверхности можно решить, не прибегая к дифференциальным уравнениям движения второго порядка, а пользуясь сразу известными первыми интегралами и уравнением поверхности.

Пусть, например, материальная точка движется по гладкой поверхности вращения по инерции. Единственной силой, действующей на точку, будет нормальная реакция поверхности. Линия действия этой реакции пересекает геометрическую ось тела, и ее момент относительно этой оси равен нулю. Следовательно, для движения проекции точки в перпендикулярной к оси тела плоскости будет иметь место интеграл площадей. Принимая ось тела за ось z цилиндрической системы координат r, φ, z, можем этот интеграл взять в форме

$$r^2\dot{\varphi} = c. \qquad (14)$$

Установленное нами ранее постоянство скорости точки в данном случае позволяет записать еще один первый интеграл

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2. \tag{15}$$

Присоединяя к этим интегралам уравнение рассматриваемой поверхности

$$f(z, r) = 0, \tag{16}$$

мы получим полную систему уравнений, позволяющую после ее интегрирования найти закон движения точки.

Вторым таким случаем является движение тяжелой материальной точки по поверхности вращения с вертикальной осью. Момент силы тяжести, как и момент реакции, относительно оси тела равен нулю, ибо эта сила параллельна оси. Поэтому по-прежнему имеет место интеграл площадей (14), а также уравнение поверхности (16). А так как сила тяжести имеет потенциал и связь склерономна, то существует интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} = U + h'.$$

Считая ось z направленной вертикально вниз и подставляя выражение потенциала $U = mgz$ в записанное уравнение, получаем из него

$$v^2 = 2gz + h.$$

Выражая еще v^2 в цилиндрических координатах, находим, что решение данной задачи можно найти из уравнений (14), (16) и уравнения

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 = 2gz + h. \tag{17}$$

10. Сферический маятник. Тяжелая материальная точка, вынужденная двигаться по идеально гладкой неподвижной поверхности или линии, называется математическим маятником. Рассмотрим сферический математический маятник, когда движение тяжелой точки происходит по идеально гладкой сфере некоторого радиуса a. Движение сферического маятника является примером только что рассмотренного движения тяжелой материальной точки по поверхности вращения с вертикальной осью, когда такой поверхностью является сфера. Поэтому уравнениями данной задачи будут уравнения (14), (16) и (17), то есть:

уравнение сферы в цилиндрических координатах

$$r^2 + z^2 = a^2, \tag{a}$$

интеграл площадей

$$r^2\dot{\varphi} = c \tag{b}$$

и интеграл энергии

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 = 2gz + h. \qquad \text{(c)}$$

Дифференцируя (a) по времени, имеем

$$r\dot{r} + z\dot{z} = 0,$$

откуда

$$\dot{r} = -\frac{z\dot{z}}{r}.$$

Из (b) находим

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}. \qquad \text{(d)}$$

Подставляя $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ в (c), получаем:

$$\frac{z^2\dot{z}^2}{r^2} + \frac{c^2}{r^2} + \dot{z}^2 = 2gz + h,$$

что с помощью уравнения сферы (a) дает

$$\frac{a^2}{a^2 - z^2}\dot{z}^2 + \frac{c^2}{a^2 - z^2} = 2gz + h.$$

Отсюда имеем

$$a\dot{z} = \pm\sqrt{(2gz + h)(a^2 - z^2) - c^2},$$

где знак плюс отвечает тем моментам времени, в которые $\dot{z} > 0$ (точка идет вниз), а знак минус—когда $\dot{z} < 0$ (точка идет вверх).

Разделяя переменные, находим

$$dt = \frac{a\,dz}{\pm\sqrt{(2gz+h)(a^2-z^2) - c^2}}. \qquad \text{(e)}$$

Интегрируя от $t = 0$ до произвольного момента t, получаем

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{a\,dz}{\pm\sqrt{(2gz + h)(a^2 - z^2) - c^2}},$$

где z_0 — начальное значение координаты z. В правой части стоит эллиптический интеграл I рода, с помощью которого время t определяется как функция от z. Обращение эллиптических интегралов I рода приводит к функциям, называемым эллиптическими. Таким образом, решая полученное выражение относительно z, найдем решение в виде некоторой эллиптической функции $z = z(t)$.

Из (d) имеем

$$d\varphi = \frac{c}{r^2}\,dt = \frac{c}{a^2 - z^2}\,dt.$$

Подставляя dt из (e) и интегрируя от z_0 до z, находим

$$\varphi = \int_{z_0}^{z} \frac{acdz}{\pm (a^2 - z^2)\sqrt{(2gz + h)(a^2 - z^2) - c^2}} + \varphi_0.$$

Определив отсюда функцию $\varphi = \varphi(z)$ и подставляя найденное значение $z = z(t)$, получим закон изменения координаты φ со временем $\varphi = \varphi(t)$.

Из уравнения сферы, зная $z = z(t)$, найдем также $r = r(t)$, и закон движения точки будет определен.

Эллиптические функции являются двоякопериодическими функциями, у которых только один период может быть вещественным. Реальному движению точки отвечает этот период, и поэтому движение маятника будет носить периодический характер.

Можно указать также область поверхности сферы, внутри которой будет двигаться маятник. Введем обозначение

$$\psi(z) = (2gz + h)(a^2 - z^2) - c^2.$$

Тогда

$$\dot{z} = \pm \sqrt{\psi(z)}.$$

Для вещественности $\dot{z}$ необходимо, чтобы во все время движения было $\psi(z) \geqslant 0$. Для выяснения места расположения корней функции $\psi(z)$ имеем:

$$\psi(-\infty) = +\infty > 0,$$

$$\psi(-a) = -c^2 < 0,$$

$$\psi(z_0) \geqslant 0,$$

$$\psi(a) = -c^2 < 0,$$

$$\psi(\infty) = -\infty < 0.$$

Из этой таблицы следует, что один корень располагается в интервале между $z = -\infty$ и $z = -a$ и не имеет физического смысла, ибо для действительного движения $|z| < a$. Два же других корня z_1 и z_2 будут удовлетворять неравенству

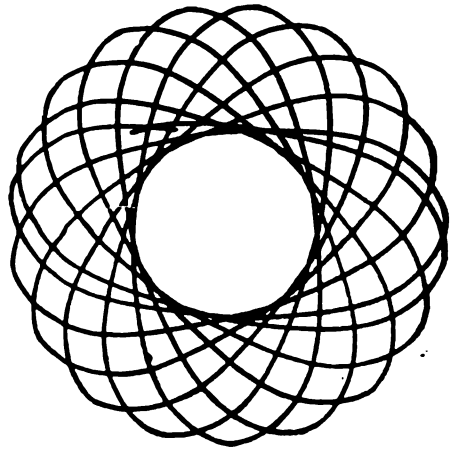
$$-a < z_1 \leqslant z_0 \leqslant z_2 < a.$$

Эти два корня и ограничивают область, где $\psi(z) \geqslant 0$, то есть область движения точки.

Таким образом, при $z_1 \neq z_2$ маятник будет двигаться по поверхности пояса сферы, расположенного между параллелями $z = z_1$ и $z = z_2$. На этих границах $\psi(z) = 0$, поэтому на них $\dot{z} = 0$, так что скорость точки будет касательной к крайним параллелям.

Изложенное выше решение относится к этому случаю.

Траектория точки получается в виде незамкнутой кривой, состоящей из повторяющихся витков, касающихся крайних параллелей и постепенно поворачивающихся вокруг вертикальной оси сферы. На фиг. 104 показан примерный вид траектории, если смотреть на нее сверху.



Фиг. 104.

Если же $z_1 = z_2 = z_0$, то пояс вырождается в окружность, плоскость которой перпендикулярна оси z, причем во все время движения будет

$$r = r_0, \qquad z = z_0, \qquad \dot{z} = 0, \qquad \dot{r} = 0$$

и

$$\psi(z) = \psi(z_0) = 0.$$

Из (c) тогда получаем

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2gz_0 + h}{r_0^2} . \tag{f}$$

Вследствие кратности корня имеем также уравнение $\psi'(z_0) = 0$, что приводит к равенству

$$-3gz_0^2 - hz_0 + ga^2 = 0,$$

откуда

$$h = \frac{g(a^2 - 3z_0^2)}{z_0} .$$

Подстановка в (f) с учетом (a) дает

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{r_0^2}\left(2z_0 + \frac{a^2 - 3z_0^2}{z_0}\right) = \frac{g}{z_0} . \tag{g}$$

Следовательно, такое движение возможно лишь при $z_0 > 0$,

то есть в нижней половине сферы. Извлекая корень из (g) и интегрируя, находим

$$\varphi = \varphi_0 \pm \sqrt{\frac{g}{z_0}}\, t.$$

Маятник в этом случае называется *круговым коническим маятником*, ибо если маятник осуществить с помощью груза, подвешенного на нити, то нить в данном случае будет описывать круговой конус.

Особым является тот случай, когда постоянная площадей $c = 0$. В этом случае имеем из (b) или $r = 0$, то есть $z = \pm a$, что отвечает состоянию покоя точки, или $\dot{\varphi} = 0$ и, следовательно, $\varphi = \text{const}$, так что точка движется по вертикальной окружности. Этот последний случай мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 27. Движение материальной точки по линии

1. Уравнения движения точки по шероховатой линии. Всякую линию можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей. Поэтому теория движения точки по линии в значительной мере может быть получена путем использования предыдущих результатов, относящихся к движению точки по поверхности.

Реакцию линии снова можно рассматривать как состоящую из нормальной реакции $\boldsymbol{N}$ и силы трения $\boldsymbol{T}$. Нормальную реакцию, лежащую в нормальной плоскости линии, в свою очередь, следует считать образованной нормальными реакциями обеих поверхностей. Если поэтому $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ — орты нормалей к этим поверхностям, то

$$\boldsymbol{N} = N_1\boldsymbol{n}_1 + N\boldsymbol{n}_2, \tag{1}$$

где N_1 и N_2 — алгебраические значения нормальных реакций поверхностей.

Проводя орт касательной к кривой $\boldsymbol{\tau}$ в сторону движения точки, силу трения можем представить в форме

$$\boldsymbol{T} = -\kappa N\boldsymbol{\tau},$$

где N — численное значение нормальной реакции.

Таким образом, реакция линии может быть взята в виде

$$\boldsymbol{R} = N_1\boldsymbol{n}_1 + N_2\boldsymbol{n}_2 - \kappa N\boldsymbol{\tau},$$

и общее уравнение несвободного движения точки (26—1) для данного случая будет

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + N_1\boldsymbol{n}_1 + N_2\boldsymbol{n}_2 - \kappa N\boldsymbol{\tau}. \tag{2}$$

При проектировании этого уравнения на оси декартовых координат ограничимся, как и в случае движения точки по

поверхности, движением точки по неподвижной линии с уравнениями

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Считаем орты $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ направленными в сторону возрастания соответствующих функций f_1 и f_2. Следовательно,

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{\operatorname{grad} f_1}{|\operatorname{grad} f_1|}, \qquad \boldsymbol{n}_2 = \frac{\operatorname{grad} f_2}{|\operatorname{grad} f_2|}.$$

Введем обозначения

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{|\operatorname{grad} f_1|}, \qquad \lambda_2 = \frac{N_2}{|\operatorname{grad} f_2|}. \tag{4}$$

Кроме того, имеем

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 - \kappa N \frac{\boldsymbol{v}}{v}. \tag{5}$$

Проектируя это уравнение на оси декартовых координат, получаем следующие дифференциальные уравнения движения точки по шероховатой линии:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - \kappa N \frac{\dot{x}}{v}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - \kappa N \frac{\dot{y}}{v}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - \kappa N \frac{\dot{z}}{v}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Величину нормальной реакции N можно выразить через нормальные реакции N_1 и N_2 и, следовательно, через множители λ_1 и λ_2. Для этого нужно только выражение (1) умножить скалярно само на себя и использовать (4) и выражения для $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Таким путем найдем:

$$N^2 = N_1^2 + N_2^2 + 2N_1N_2(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2) =$$
$$= \lambda_1^2 |\operatorname{grad} f_1|^2 + \lambda_2^2 |\operatorname{grad} f_2|^2 + 2\lambda_1\lambda_2 (\operatorname{grad} f_1 \cdot \operatorname{grad} f_2). \tag{7}$$

Присоединяя к уравнениям (6) уравнения связи (3), имеем полную систему пяти уравнений для определения пяти функций времени x, y, z, λ_1, λ_2. Найдя λ_1 и λ_2, можем по формулам (4) и (7) определить как нормальные реакции обеих поверхностей, так и полную нормальную реакцию кривой.

Составим еще уравнения движения точки по неподвижной кривой в проекциях на оси натурального триедра этой кривой, то есть на орт касательной $\boldsymbol{\tau}$, орт главной нормали $\boldsymbol{\nu}$ и орт бинормали $\boldsymbol{b}$. Для этого уравнение (2) запишем в виде

$$m\left(\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\nu}\right)=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}-\kappa N\boldsymbol{\tau}.$$

Проектирование на указанные орты дает

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau-\kappa N,\\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_\nu+N_\nu,\\ 0 &= F_b+N_b. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Эти уравнения называются *естественными уравнениями* движения точки по кривой.

Из последнего уравнения видно, что если кривая плоская и активная сила $\boldsymbol{F}$ лежит в ее плоскости, то $N_b=0$, и нормальная реакция $\boldsymbol{N}$ оказывается направленной по главной нормали кривой, то есть тоже лежит в плоскости кривой.

Если движение точки происходит по инерции, то последнее уравнение (8) тоже дает $N_b=0$, а первые два принимают вид

$$m\frac{dv}{dt}=-\kappa N, \qquad m\frac{v^2}{\rho}=N.$$

Подставляя N из второго уравнения в первое, приходим к уравнению движения точки по кривой

$$\frac{dv}{dt}=-\kappa\frac{v^2}{\rho},$$

то есть к такому же уравнению, как и при движении точки по поверхности в отсутствие приложенных сил. Поэтому мы придем к тем же результатам о характере изменения скорости точки.

2. Дифференциальные уравнения движения точки по идеально гладкой кривой. Вследствие отсутствия силы трения мы должны во всех предыдущих уравнениях положить $\kappa=0$. Тогда по (5) векторное уравнение движения точки по идеально гладкой линии будет

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}+\lambda_1\operatorname{grad}f_1+\lambda_2\operatorname{grad}f_2, \tag{9}$$

где λ_1 и λ_2 по-прежнему связаны с нормальными реакциями двух поверхностей соотношениями (4). При этом мы осво-

бождаемся от затруднений, связанных с проектированием орта касательной τ, и можем уравнения поверхностей, то есть уравнения нашей линии, взять в более общем виде:

$$f_1(x, y, z, t) = 0, \qquad f_2(x, y, z, t) = 0. \tag{10}$$

Проектируя уравнение (9) на оси декартовых координат или полагая в уравнениях (6) $\kappa = 0$, получаем следующие дифференциальные уравнения движения точки по идеально гладкой кривой:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Эти уравнения называются, как и в случае движения точки по поверхности, *уравнениями Лагранжа в декартовых координатах* или *уравнениями Лагранжа первого рода*. Совместно с уравнениями (10) они дают необходимую систему пяти уравнений для пяти искомых функций x, y, z, λ_1, λ_2. Можно указать следующий порядок решения этих уравнений, аналогичный указанному ранее порядку для движения точки по поверхности. Исключая множители λ_1 и λ_2 из уравнений (11), придем к одному дифференциальному уравнению для функций x, y, z. Дифференцируя дважды уравнения (10) по времени, находим с помощью полученных условий, налагаемых связями на производные, и самих уравнений (10) выражения двух из координат и их производных через третью и ее производные, например, x, y, и их производные выразим через z, $\dot{z}$ и $\ddot{z}$. Подставляя эти выражения в полученное одно дифференциальное уравнение, придем к дифференциальному уравнению второго порядка только для z. Интегрируя это уравнение и подставляя найденное решение в выражения для x и y, полученные из уравнений (10), найдем общее решение, зависящее от двух произвольных постоянных:

$$x = x(t, C_1, C_2),$$
$$y = y(t, C_1, C_2),$$
$$z = z(t, C_1, C_2).$$

Таким образом, для полного определения закона движения точки необходимо иметь два начальных условия, что соответствует одной степени свободы, которой обладает точка в данном случае.

Если в задаче необходимо разыскать также реакцию связи, то из любых двух уравнений (11) находим множители λ_1 и λ_2 и тогда по (7) сможем найти величину N нормальной реакции кривой.

Естественные уравнения движения точки по неподвижной гладкой кривой получаются из (8) в виде:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau, \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_\nu + N_\nu, \\ 0 &= F_b + N_b. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Первое из этих уравнений позволяет полностью определить движение точки по кривой, ибо $v = \dot{s}$, так что в конечном счете это уравнение позволяет найти закон движения точки по кривой $s = s(t)$. Два других уравнения дадут тогда возможность найти нормальную реакцию кривой.

В случае движения точки по плоской кривой и силы $\boldsymbol{F}$, лежащей в плоскости этой кривой, последнее уравнение опять дает $N_b = 0$, и, следовательно, во втором уравнении составляющая N_ν обращается в полную нормальную реакцию кривой.

3. Теорема кинетической энергии. При движении точки по идеально гладкой кривой работа нормальной реакции кривой может быть представлена как работа двух ее составляющих $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$, нормальных к поверхностям (10). Поэтому теорема кинетической энергии для этого движения может быть записана в форме

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{N}_1\cdot d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{N}_2\cdot d\boldsymbol{r}$$

или иначе, согласно (9),

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1\cdot d\boldsymbol{r} + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Дифференцируя уравнения (10), найдем, как и при движении точки по поверхности,

$$\operatorname{grad} f_j\cdot d\boldsymbol{r} + \frac{\partial f_j}{\partial t}dt = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

Отсюда, следует, что теорема кинетической энергии в дифференциальной форме имеет вид:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t}dt - \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t}dt.$$

Видим, что если кривая неподвижна, то есть является склерономной связью, то

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0,$$

и теорема принимает такой же вид, как и для свободной материальной точки. Поэтому если активные силы имеют потенциал, то в этом случае, как и при движении по неподвижной поверхности, будет иметь место интеграл энергии.

4. Круговой математический маятник. Круговым математическим маятником называется материальная точка, движущаяся под действием силы тяжести по идеально гладкой окружности, находящейся в вертикальной плоскости. На практике такой маятник можно осуществить различными способами. Так, это можно сделать с помощью стержня, вращающегося вокруг одного конца, с прикрепленным к нему тяжелым грузом на другом конце, причем масса стержня настолько мала, что ею можно пренебречь. Вместо стержня можно взять гибкую нерастяжимую нить. Наконец, можно представить себе движение тяжелой материальной точки по материально выполненной окружности, например, в виде некоторого кругового желоба. В двух последних случаях связь может быть неудерживающей, позволяющей точке сходить с окружности внутрь в моменты времени, в которые нормальная реакция связи обращается в нуль. Мы ограничимся далее случаем только удерживающей связи.

Возьмем естественные уравнения движения материальной точки, которые согласно (12) для плоского движения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau, \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_\nu + N. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(а)}$$

Обозначим через l длину маятника, то есть радиус окружности, по которой он движется, центр окружности O (фиг. 105) назовем точкой подвеса маятника. Положение маятника будем определять углом φ, который линия OM составляет в данный момент с направленной вниз вертикально OA. Орт касательной τ к окружности направляем в сторону положительного отсчета угла φ, то есть отсчета против стрелки часов, орт ν — по внутренней нормали к окружности. Тогда в уравнениях (а) мы должны положить

$$v = l\dot{\varphi}, \qquad \rho = l.$$

Составляя еще из чертежа задачи выражения проекций силы тяжести, приходим к уравнениям

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi,$$

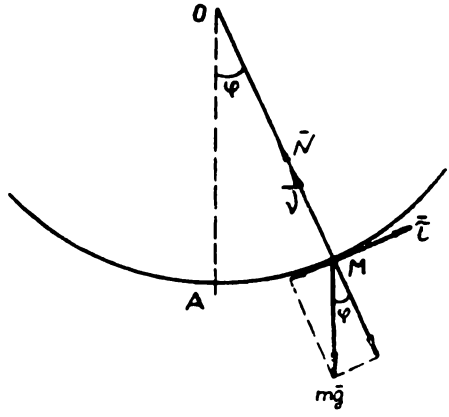
$$ml\dot{\varphi}^2 = -mg\cos\varphi + N.$$

Второе уравнение будет служить только для определения реакции N, закон же движения маятника определится из первого уравнения, которое можно переписать в форме

$$\ddot{\varphi} + n^2\sin\varphi = 0, \qquad \text{(b)}$$

где

$$n^2 = \frac{g}{l}. \qquad \text{(c)}$$



Фиг. 105.

Рассмотрим сначала случай малых колебаний маятника, получающихся тогда, когда во все время движения угол φ настолько мал, что в уравнении (b) можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$. Дифференциальное уравнение таких колебаний

$$\ddot{\varphi} + n^2\varphi = 0$$

есть уравнение простого гармонического колебания, общий интеграл которого, как мы знаем, имеет вид

$$\varphi = \alpha\sin(nt + \varepsilon).$$

Постоянные интегрирования α и ε будут здесь являться угловой амплитудой и начальной фазой колебания.

Период малых колебаний маятника есть

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad \text{(d)}$$

Как видим, период колебания не зависит от амплитуды колебания, а зависит только от его длины l и ускорения силы тяжести g. Следовательно, в одном и том же месте земной поверхности период малых колебаний данного математического маятника есть величина постоянная. Это свойство маятника называется его *изохронностью*, и оно постоянно используется в маятниковых часах.

Перейдем теперь к случаю конечной амплитуды колебаний маятника, то есть к случаю, когда колебания настолько велики, что $\sin\varphi$ нельзя заменять через φ. В этом случае

мы должны поставить задачу о разыскании решения точного уравнения (b). Умножая обе части этого уравнения на $d\varphi = \dot{\varphi}dt$, имеем

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi}\,dt + n^2 \sin\varphi d\varphi = 0,$$

что после интегрирования дает

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - n^2\cos\varphi = C.$$

Примем за начальное положение маятника положение его крайнего отклонения. Тогда начальные условия будут:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = \alpha, \quad \dot{\varphi} = 0,$$

откуда постоянная интегрирования найдется как

$$C = -n^2\cos\alpha,$$

и полученный интеграл примет вид

$$\dot{\varphi}^2 = 2n^2(\cos\varphi - \cos\alpha). \tag{e}$$

Отсюда

$$\pm\frac{d\varphi}{dt} = n\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)},$$

где знак плюс отвечает движению маятника в сторону возрастания угла φ, а минус — его движению в противоположную сторону.

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{\pm d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}} = n\sqrt{2}\,dt.$$

Заменяя здесь косинусы через синусы половинных углов по формулам вида

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

находим

$$\frac{\pm d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2n\,dt. \tag{f}$$

Введем обозначение

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \kappa$$

и перейдем к новой функции u, полагая

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \kappa\sin u. \tag{g}$$

Тогда

$$\cos\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\varphi}{2} = \kappa\cos u\,du,$$

откуда

$$d\varphi = \frac{2\kappa\cos u\,du}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\kappa\cos u\,du}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2 u}}.$$

При этой подстановке уравнение (f) примет вид

$$\frac{\pm\,du}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2 u}} = n\,dt. \tag{h}$$

При принятых начальных условиях для начального значения $u = u_0$ будем иметь из (g)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \kappa\sin u_0,$$

то есть

$$\sin u_0 = 1,\quad u_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому, интегрируя (h) в пределах от 0 до t, находим

$$t = \pm\frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{u}\frac{du}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2 u}}. \tag{i}$$

Таким образом, время t оказалось выраженным через u с помощью эллиптического интеграла первого рода. Обращая интеграл, найдем зависимость $u = u(t)$ в виде соответствующей эллиптической функции.

Из выражения (e) видим, что при движении маятника угол φ меняется в пределах от $-\alpha$ до $+\alpha$, ибо $\dot{\varphi}^2$ не может иметь отрицательного значения. Кроме того, в симметричных относительно вертикали OA (фиг. 105) точках $\dot{\varphi}^2$ имеет одно и то же значение, обращаясь при $\varphi = \pm\alpha$ в нуль. Следовательно, как и в случае малых колебаний, мы будем иметь дело с колебанием маятника между крайними положениями, определяемыми углом α.

Для определения периода этих колебаний заметим, что нижний предел интеграла в (i) отвечает положению крайнего отклонения маятника $\varphi = \alpha$. Поэтому для движения маятника до другого крайнего его положения $\varphi = -\alpha$ следует в (i) взять знак минус. А так как промежуток времени, отвечающий перемещению маятника из его крайнего положения в наинизшее $\varphi = 0$, равен четверти периода колебаний T, то этот период найдется из соотношения

$$\frac{1}{4}T = -\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{du}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2 u}} = \frac{1}{n}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2 u}},$$

то есть

$$T = \frac{4}{n}F(\kappa),$$

где $F(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Разлагая подинтегральную функцию в ряд Маклорена, имеем

$$(1-\kappa^2\sin^2 u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\kappa^2\sin^2 u + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2}\kappa^4\sin^4 u + \ldots$$

Поэтому выражение для T перепишется в виде

$$T = \frac{4}{n}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{1 + \frac{1}{2}\kappa^2\sin^2 u + \frac{1.3}{2.4}\kappa^4\sin^4 u + \frac{1.3.5}{2.4.6}\kappa^6\sin^6 u + \ldots\right\}du.$$

Интеграл от каждого члена ряда можно вычислить с помощью известной формулы Валлиса

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m} u\,du = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\frac{\pi}{2}.$$

Делая это, а также подставляя значение κ и значение n из (c), приходим к формуле для периода колебаний:

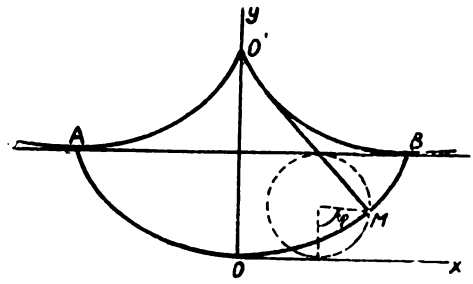
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\right\}. \qquad (j)$$

Как видим отсюда, период колебаний кругового маятника зависит от амплитуды колебаний, и поэтому в действительности эти колебания не будут изохронными. Однако

эта зависимость при малых амплитудах оказывается мало заметной и в этом случае можно пользоваться формулой (d), получающейся из (j) пренебрежением по сравнению с единицей всеми членами, содержащими $\sin\frac{\alpha}{2}$ в различных степенях. Для примера укажем, что даже при $\alpha = 10°$ фигурная скобка в (j) превышает единицу только на 0,002. Это обстоятельство и позволяет использовать круговой маятник в часах и других приборах, где требуется изохронность колебаний, при условии, что колебания маятника достаточно малы.

5. Циклоидальный маятник. Существует маятник, колебания которого строго изохронны при любых амплитудах. Таким маятником является циклоидальный маятник. Покажем это.

Возьмем циклоиду, расположенную в вертикальной плоскости и обращенную выпуклостью вниз (фиг. 106). Ее можно рассматривать как образованную точкой окружности



Фиг. 106.

радиуса a, катящейся по горизонтальной прямой AB снизу. Тогда уравнения циклоиды в осях координат, указанных на чертеже, с началом в наинизшей точке циклоиды O, будут

$$x = a(\varphi + \sin\varphi),\quad y = a(1 - \cos\varphi). \tag{a}$$

Легко установить связь между вертикальной координатой y движущейся по циклоиде точки и ее дуговой координатой s, отсчитываемой вдоль циклоиды от начала координат O. Из уравнений (a) имеем

$$dx = a(1 + \cos\varphi)\,d\varphi,\quad dy = a\sin\varphi\,d\varphi, \tag{b}$$

откуда

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,d\varphi =$$
$$= a\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi.$$

Из второго уравнения (b) находим

$$d\varphi = \frac{dy}{a\sin\varphi} = \frac{dy}{a\sqrt{1-\cos^2\varphi}}.$$

Подставляя в ds, получаем, с учетом второго уравнения (a):

$$ds = \sqrt{\frac{2(1+\cos\varphi)}{1-\cos^2\varphi}}\,dy = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\varphi}}\,dy = \sqrt{\frac{2a}{y}}\,dy.$$

Интегрируя это выражение и имея в виду, что при $y = 0$ $s = 0$, получаем

$$s = \sqrt{8ay},$$

откуда

$$y = \frac{s^2}{8a}. \qquad \text{(c)}$$

Так как циклоида неподвижна и идеально гладкая, а движение точки происходит под действием силы тяжести, то имеет место интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} = U + h = -mgy + h.$$

Пусть $y = y_0$ есть ордината крайнего положения маятника, в котором $v = 0$. Тогда $h = mgy_0$ и интеграл энергии дает

$$v^2 = 2g(y_0 - y).$$

На основании (c) отсюда находим

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{4a}(s_0^2 - s^2)}.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{4a}}\,dt,$$

откуда после интегрирования имеем

$$\arcsin\frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{4a}}\,t + C. \qquad \text{(d)}$$

Пусть положение крайнего отклонения маятника отвечает начальному моменту времени. Тогда для определения постоянной C имеем начальное условие:

при $t = 0$ $\qquad s = s_0$.

Следовательно,

$$C = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя это значение в (d) и беря операцию синуса от обеих частей, находим

$$\frac{s}{s_0} = \cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t,$$

то есть

$$s = s_0 \cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t.$$

Таким образом, колебания маятника происходят по закону простого гармонического колебания. Эти колебания будут изохронными при любых амплитудах, ибо период колебания

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

вовсе не зависит от амплитуды и определяется лишь параметром циклоиды a и ускорением силы тяжести g.

Для реального осуществления такого маятника Гюйгенс в свое время предложил подвешивать движущуюся точку M на нити $O'M$ (фиг. 106), равной по длине половине длины одной ветви циклоиды, причем точкой подвеса O' должна служить точка возврата такой же циклоиды, находящейся над AB и касающейся этой прямой. Тогда при движении точки M нить будет наматываться на дуги верхней циклоиды, а сама точка M будет описывать нижнюю циклоиду. Однако технические трудности осуществления такого устройства привели к тому, что циклоидальный маятник не получил практического применения.

Можно показать, что циклоида обладает еще одним примечательным свойством, являясь для сил тяжести *брахистохроной,* то есть кривой наибыстрейшего ската, по сравнению с любыми другими кривыми, по которым тяжелая точка может скатываться из одного заданного положения в другое.

6. Принцип Даламбера. Векторному уравнению несвободного движения материальной точки по линии или по поверхности можно придать иной вид, получивший название принципа Даламбера. Возьмем уравнение (26—1).

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R},$$

где, как мы знаем, $\boldsymbol{F}$ есть равнодействующая активных сил, действующих на точку, а $\boldsymbol{R}$ — равнодействующая реакций связей. Перенося член $m\boldsymbol{w}$ в другую часть равенства, можем уравнение движения точки переписать в виде

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{I} = 0, \tag{13}$$

где

$$\boldsymbol{I} = -m\boldsymbol{w}. \tag{14}$$

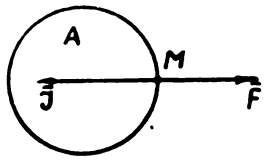
Этот вектор I называется силой инерции материальной точки. Таким образом, *силой инерции называется вектор, равный по модулю произведению массы точки на величину ее ускорения и направленный противоположно ускорению.*

Уравнение (13) и выражает собой принцип Даламбера. Как видим, этот принцип с формальной стороны представляет собой иную запись основного закона динамики. Так как равенство (13) говорит об уравновешивании входящих в него сил, то принципу Даламбера можно дать следующую краткую формулировку:

Действующие на материальную точку активные и пассивные силы уравновешиваются с силой инерции точки.

Однако такая формулировка может повести к недоразумению того рода, что поскольку все силы уравновешены, то точка должна находиться в покое или двигаться по инерции. На самом деле о силе инерции можно говорить только при ускоренном движении точки. Кроме того, нужно помнить, что сила инерции является для данной точки фиктивной силой, в действительности не приложенной к ней. Поэтому принцип Даламбера можно сформулировать еще в таком уточняющем его виде:

Уравнениям движения материальной точки можно придать вид уравнений статики, если к действующим на точку активным силам и силам реакций присоединить фиктивные силы инерции.



Фиг. 107.

Необходимо заметить, что названные нами фиктивными силы инерции являются в то же время и реально существующими силами, но приложенными только не к рассматриваемой материальной точке, а к тем телам, которые вызывают ускорение данной точки. В самом деле, рассмотрим простейший пример, когда тело A (фиг. 107) действует на материальную точку M с некоторой силой F. Уравнение движения точки будет

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}.$$

По закону равенства действия и противодействия, точка M будет действовать на тело A с силой

$$-\boldsymbol{F} = -m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{I},$$

и сила инерции I окажется приложенной к телу A как вполне реальная сила.

Принцип Даламбера применим и для движения свободной материальной точки. В этом случае нужно только опустить $\boldsymbol{R}$ в уравнении (13), а в записанных формулировках принципа — упоминание о силах реакций. Для несвободной же материальной точки этот принцип можно представить

еще в несколько другой форме. Именно можно считать, что одна часть активной силы идет на сообщение ускорения точки, а другая — на преодоление действия реакций связей. Первая часть называется *двигательной* силой, вторая — *потерянной* силой. Двигательная сила равна

$$m\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{I},$$

поэтому вектор потерянной силы $\boldsymbol{Q}$ будет

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{I}.$$

Отсюда следует, что уравнение принципа (13) можно переписать в виде

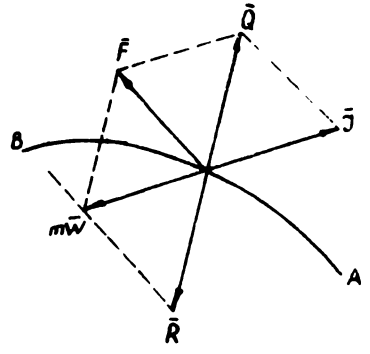
$$\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R} = 0. \qquad (15)$$

Таким образом, принцип Даламбера можно представить еще в виде такого положения:

В каждый момент времени потерянная сила уравновешивается с реакциями связей, которым подчинена материальная точка.

Это положение можно проиллюстрировать представленной на фиг. 108 схемой взаимного расположения рассматриваемых векторов (AB — траектория точки).

Принцип Даламбера, не представляя для одной материальной точки по существу ничего нового по сравнению со вторым законом Ньютона, соединенным с аксиомой связей, оказывается весьма удобным на практике, позволяя в задачах динамики применять все известные методы статики. Так, пользуясь векторным уравнением (13), можно задачи динамики решать геометрическими методами статики. А проектируя это уравнение на какие-либо оси, можно применять для этой цели аналитические методы статики.



Фиг. 108.

Пример. Груз M весом P, привязанный нитью OM (фиг. 109) к неподвижной точке O, описывает горизонтальную окружность с постоянной скоростью. Зная длину нити l и ее угол с вертикалью α, определить натяжение нити T, скорость груза v и время t_1, в течение которого он описывает полную окружность.

Груз M находится под действием силы веса $\boldsymbol{P}$, направленной вертикально вниз, и реакции натяжения нити, направленной по нити вверх. Присоединяя к этим силам силу инерции $\boldsymbol{I}$, направленную противоположно чисто нормальному ускорению груза при его движении по окружности, видим, что все эти силы лежат в одной плоскости, проходящей через нить и ось OO'. Поэтому по принципу Даламбера они образуют замкнутый треугольник (b).

Из этого треугольника находим натяжение нити

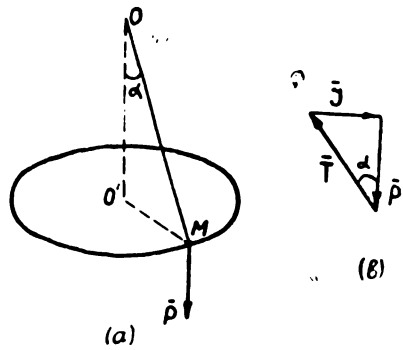
$$T = \frac{P}{\cos\alpha}.$$

Сила инерции есть

$$I = \frac{P}{g}\frac{v^2}{l\sin\alpha}.$$

Приравнивая ее получаемому из чертежа (*b*) значению

$$I = P\operatorname{tg}\alpha,$$



Фиг. 109.

находим скорость груза

$$v = \sin\alpha\sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}}.$$

Наконец, в силу равномерности движения груза по окружности получаем для длины окружности

$$vt_1 = 2\pi l\sin\alpha,$$

откуда искомое время t_1 будет

$$t_1 = \frac{2\pi l\sin\alpha}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha}.$$

Глава 3

ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

§ 28. Относительное движение и равновесие материальной точки

1. Уравнения относительного движения материальной точки. Будем, как и в § 12, рассматривать относительное движение материальной точки по отношению к среде S, движущейся в свою очередь относительно другой среды Σ, принимаемой за неподвижную. Считая в общем случае точку несвободной, можем векторное уравнение абсолютного движения точки, то есть ее движение относительно среды Σ, взять в форме

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}, \tag{a}$$

с хорошо известным нам смыслом векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$. По теореме Кориолиса, абсолютное ускорение $\boldsymbol{w}$ точки равно геометрической сумме ускорений переносного $\boldsymbol{w}_e$, относительно $\boldsymbol{w}_r$ и Кориолисова $\boldsymbol{w}_c$:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_c.$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{w}_e &= \boldsymbol{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}), \\ \boldsymbol{w}_c &= 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r, \\ \boldsymbol{w}_r &= \tilde{\dot{\boldsymbol{v}}}_r = \tilde{\ddot{\boldsymbol{r}}}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ — угловая скорость и угловое ускорение среды $\boldsymbol{S}$ относительно среды Σ, $\boldsymbol{v}_r$ — относительная скорость точки, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки относительно полюса O — начала подвижной системы координат $Oxyz$, неизменно связанной со средой S. Как и ранее, знаком „волны" сверху обозначена локальная производная данного вектора.

Подставляя выражение полного ускорения в (а) и перенося в правую часть уравнения члены с $\boldsymbol{w}_e$ и $\boldsymbol{w}_c$, получаем

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{I}_e + \boldsymbol{I}_c, \tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{I}_e = m\boldsymbol{w}_e, \quad \boldsymbol{I}_c = m\boldsymbol{w}_c. \tag{3}$$

Вектор $\boldsymbol{I}_e$ называется *переносной силой инерции*, а $\boldsymbol{I}_c$ — *кориолисовой силой инерции.*

Полученное уравнение (2) является основным уравнением относительного движения материальной точки, аналогично основному уравнению динамики (а) для абсолютного движения. Как видим, в отличие от основного закона абсолютного движения относительное движение точки будет определяться не только действующими на нее активными и пассивными силами, но также переносной и кориолисовой силами инерции.

Проектируя (2) на подвижные оси декартовых координат $Oxyz$, неизменно связанные со средой S, получим дифференциальные уравнения относительного движения точки

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + R_x + I_{ex} + I_{cx}, \\ m\ddot{y} &= Y + R_y + I_{ey} + I_{cy}, \\ m\ddot{z} &= Z + R_z + I_{ez} + I_{cz}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Проекции сил инерции в этих уравнениях можно расписать подробно, пользуясь формулами (3) и первыми двумя выражениями (1).

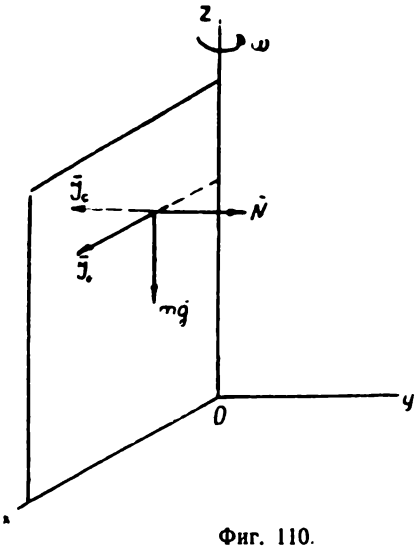
Аналогично можно составить уравнения относительного движения в проекциях на связанные со средой S любые другие оси, в частности на оси естественного трехгранника относительной траектории точки.

Уравнения (2) и (4) позволяют по-новому взглянуть на вопрос о фиктивности сил инерции. С точки зрения человека, находящегося в „неподвижной" среде Σ и наблюдающего относительное движение в среде S как бы со стороны, силы инерции $\boldsymbol{I}_e$ и $\boldsymbol{I}_c$ фиктивны, и их появление в уравнениях относительного движения объясняется только нашим желанием придать этим уравнениям тот же вид, как и уравнениям абсолютного движения. Однако наблюдателю, находящемуся внутри среды S, эти силы представятся как вполне реальные силы, влияющие как на движение самого наблюдателя, так и всех окружающих его предметов, людей и т. д. Например, при резком торможении трамвая появляется переносное ускорение, противоположное движению трамвая, а возникающая сила инерции $\boldsymbol{I}_e$ толкает всех пассажиров вперед; при поворотах поезда и трамвая сила инерции $\boldsymbol{I}_e$ заставляет всех пассажиров наклониться в сторону выпуклости пути, ибо этому повороту отвечает возникновение переносного ускорения, направленного по нормали к пути в сторону его вогнутости.

Таким образом, если мы будем находиться внутри какой-либо среды и, не имея никаких внешних ориентиров, ничего не будем знать об ускоренном движении этой среды, то появляющиеся вследствие этого движения инерционные силы I_e и I_c мы обязательно должны будем включить в состав активных сил, считая эти силы инерции действующими на все тела, находящиеся в S. Это обстоятельство позволило сначала Герцу, а затем Эйнштейну в его общей теории относительности высказать положение о принципиальной неразличимости обычных и инерционных сил.

В классической же механике, исходящей из гипотезы о возможности различения абсолютного и относительного движений, силы инерции I_e и I_c рассматриваются как фиктивные, появление которых в уравнениях относительного движения следует объяснить наличием ускоренного движения самой подвижной среды.

Пример. Материальная точка с массой m движется под действием силы тяжести по гладкой плоскости (xz), вращающейся вокруг неподвижной вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω. Найти реак-



Фиг. 110.

цию вращающейся плоскости, а также закон относительного движения точки, если она начала свое движение из положения x_0, z_0 без начальной относительной скорости.

На материальную точку будут действовать сила тяжести $m\boldsymbol{g}$ и нормальная реакция плоскости $\boldsymbol{N}$ (фиг. 110). Переносное ускорение, как ускорение точки плоскости, в которой находится движущаяся точка, будет направлено к оси вращения и иметь величину $\omega^2 x$. Поэтому переносная сила инерции I_e направлена от оси вращения параллельно оси x, имея численное значение

$$I_e = m\omega^2 x.$$

Ускорение Кориолиса $\boldsymbol{w}_c$ есть

$$\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r = 2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & 0 & \dot{z} \end{vmatrix} = 2\omega \dot{x}\, \boldsymbol{j},$$

так что

$$\boldsymbol{I}_c = -2m\omega\dot{x}\boldsymbol{j}.$$

Поэтому дифференциальные уравнения относительного движения точки (4) примут вид:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x, \quad 0 = N - 2m\omega\dot{x}, \quad m\ddot{z} = -mg,$$

откуда

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0, \quad N = 2m\omega\dot{x}, \quad \ddot{z} = -g.$$

Интегрируя первое и третье уравнения и определяя постоянные интегрирования из заданных начальных условий

при $t = 0$ $\qquad x = x_0, \; z = z_0, \; \dot{x} = \dot{z} = 0,$

находим закон относительного движения точки:

$$x = \frac{x_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}), \qquad z = z_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Подставляя x в выражение для N, определяем нормальную реакцию плоскости

$$N = mx_0\omega^2 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

2. Принцип относительности Галилея. Пусть подвижная среда S, а следовательно, и связанная с ней подвижная система отсчета $Oxyz$ движутся поступательно и притом так, что каждая точка среды движется прямолинейно и равномерно. В этом случае система отсчета $Oxyz$ называется *инерциальной*. Вследствие постоянства скорости движения инерциальной системы переносное ускорение $\boldsymbol{w}_e$ будет отсутствовать; так как при поступательном движении этой системы $\omega = 0$, то будет равняться нулю и ускорение Кориолиса $\boldsymbol{w}_c$. Поэтому

$$\boldsymbol{I}_e = \boldsymbol{I}_c = 0,$$

и векторное уравнение относительного движения точки (2) принимает вид

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}.$$

то есть такой же вид, как и уравнение абсолютного движения точки. Этот результат получил название *принципа относительности классической механики* или *принципа*

относительности Галилея. Ему можно дать следующую формулировку:

Во всех инерциальных системах отсчета движение материальной точки происходит по одному и тому же закону и при том по такому же, как и в абсолютно неподвижной системе.

Справедливость этого принципа хорошо известна из нашей повседневной практики. Так, находясь в каюте парохода, мы не можем установить, не взглянув в окно, стоит ли пароход на месте или же движется инерциально. То же состояние мы испытываем, пользуясь любым видом транспорта, если отвлечься от шума двигателя или стука колес.

Принцип Галилея имеет весьма важное значение, ибо он показывает беспочвенность всяких попыток установления абсолютной системы отсчета в полном смысле слова. В самом деле, даже если мы найдем такую систему отсчета, к которой можно отнести движения доступных для наблюдения тел вселенной, то мы еще ничего не можем сказать о том, действительно ли эта система покоится или же находится в состоянии инерциального движения.

Значение принципа состоит также в том, что он послужил исходной точкой при создании специальной теории относительности.

3. Относительное равновесие материальной точки. Пусть материальная точка находится в покое относительно подвижной системы. В таком случае относительная скорость v_r и относительное ускорение w_r равны нулю, а согласно второму выражению (1) равно нулю и ускорение Кориолиса w_c, откуда $I_c = 0$. Поэтому из (2) получаем следующее векторное уравнение относительного равновесия точки:

$$F + R + I_e = 0. \qquad (5)$$

Таким образом, *при относительном равновесии точки приложенные к ней активные силы и силы реакции уравновешиваются с переносной силой инерции.*

В приложениях уравнение (5) можно решать геометрическим методом или же аналитически, проектируя его на какие-либо направления.

Полученный результат позволяет объяснить известные факты кажущегося уменьшения или увеличения веса тел, находящихся в подвижных системах, движущихся в поле сил тяжести с ускорением, направленным по вертикали. Так, если лифт, клеть шахтного подъемника, ракетный корабль вблизи земной поверхности и т. п. движется с ускорением a, направленным вверх (фиг. 111), то это ускорение будет переносным, так что $I_e = -ma$. А так как на всякое находящееся на полу лифта тело действует сила тяжести mg,

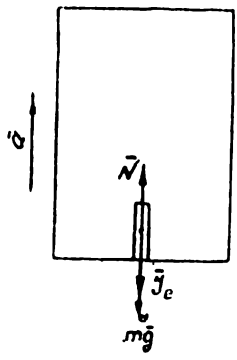
направленная вниз, и реакция пола N, направленная вверх, то проектирование уравнения (5) на направление движения лифта дает уравнение

$$-mg+N-ma=0,$$

откуда

$$N=m(g+a). \qquad (a)$$

Следовательно, в этом случае будет наблюдаться кажущееся увеличение веса, причем ускорение силы тяжести увеличивается как бы на величину переносного ускорения a. Это явление получило название явления *перегрузки*. С перегрузкой, как с вредным явлением, лимитирующим возможное ускорение системы, приходится иметь дело, например, при разгоне современных космических кораблей с пассажирами на начальном участке траектории.



Фиг. 111.

Наоборот, если ускорение a направлено вертикально вниз, то переносная сила инерции меняет свое направление на противоположное, и тем же путем найдем

$$N=m(g-a),$$

то есть будет иметь место кажущееся уменьшение веса тела. В частности, при $a=g$ наступит состояние невесомости подобно тому, как это происходит при движении космического корабля по круговой орбите вокруг Земли, когда его нормальное ускорение, направленное к центру Земли, становится равным ускорению силы земного притяжения.

Пример. В качестве примера рассмотрим предложение Жюль Верна о полете людей на луну внутри большого артиллерийского снаряда. В его романе „Вокруг луны" снаряд с космонавтами выбрасывается из пушки длиной $L=275$ *м* со скоростью $v=11$ *км/сек*. Посмотрим, возможен ли такой способ осуществления космических полетов.

К движению снаряда внутри канала орудия будет полностью применима схема, изображенная на фиг. 111, так что реакция дна снаряда на каждого пассажира, равная кажущемуся весу человека, будет определяться формулой (a).

Примем ради простоты, что ускорение снаряда a, вызываемое расширяющимися пороховыми газами, постоянно. Длину пушки будем считать за путь, пройденный снарядом по каналу. Тогда, исключая время t из формул равноускоренного движения

$$v=at, \quad L=\frac{at^2}{2},$$

найдем, что

$$a=\frac{v^2}{2L}. \qquad (b)$$

Подставляя цифры, находим

$$a = \frac{121 \cdot 10^6}{2 \cdot 275} = 220000 \text{ м/сек}^2 \approx 22200\ g \text{ м/сек}^2.$$

Поэтому (а) дает

$$N = m(g + 22200\, g) \approx 22200\ mg,$$

то есть вес каждого человека оказался как бы увеличенным в 22200 раз. Ясно, что в первые же мгновения движения люди в снаряде были бы раздавлены этой колоссальной перегрузкой, и поэтому такой способ осуществления космических полетов совершенно не приемлем.

В связи с развитием авиации и других быстродвижущих средств транспорта вопрос о допустимой для человеческого организма перегрузке подвергся подробному исследованию. Оказалось, что для малых промежутков времени допустимы перегрузки в 20, 30 и даже несколько более раз; когда же переносная сила инерции действует сколько-нибудь длительное время, то даже тренированный организм без вреда своему здоровью в состоянии переносить не более, чем четырехкратную перегрузку. Если мы примем последнюю цифру, положив $a = 4g$, то из той же формулы (b) найдем, что длина пушки должна быть

$$L = \frac{v^2}{2a} = \frac{121 \cdot 10^6}{8.9{,}81} \approx 1356000 \text{ м} = 1356 \text{ км}.$$

Ясно, что создать такую пушку практически невозможно.

4. Теорема кинетической энергии для относительного движения. Возьмем векторное уравнение (2) относительного движения точки

$$m \frac{\tilde{d}\boldsymbol{v}_r}{dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{I}_e + \boldsymbol{I}_c$$

и умножим его скалярно на $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_r\, dt$. Считая, что точка свободна или связь идеальна так, что сила реакции $\boldsymbol{R}$ нормальна к перемещению $d\boldsymbol{r}$, будем иметь $\boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$. Кроме того, имеем также

$$\boldsymbol{I}_c \cdot d\boldsymbol{r} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r) \cdot d\boldsymbol{r} = 0,$$

ибо векторы $\boldsymbol{v}_r$ и $d\boldsymbol{r}$ коллинеарны. Таким образом, получим

$$m\boldsymbol{v}_r . d\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{F} . d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{I}_e . d\boldsymbol{r}.$$

Но

$$\boldsymbol{v}_r . d\boldsymbol{v}_r = \frac{1}{2} d(\boldsymbol{v}_r . \boldsymbol{v}_r) = d\,\frac{v_r^2}{2}.$$

Подставляя в предыдущее выражение, находим, что для относительного движения точки теорема кинетической энергии имеет вид

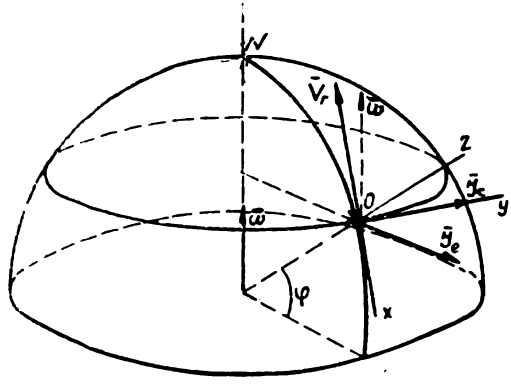
$$d\left(\frac{mv_r^2}{2}\right) = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{I}_e \cdot d\boldsymbol{r},$$

то есть *дифференциал кинетической энергии относительного движения точки равен сумме элементарных работ активной силы и переносной силы инерции.*

5. Влияние вращения Земли на движение земных тел. Изучая движение тел относительно земной по-

верхности, мы часто пренебрегаем влиянием вращения Земли вокруг ее оси, рассматривая Землю как неподвижную (или как инерциальную систему). Однако во многих случаях приходится учитывать это влияние и считать связанное с поверхностью Земли пространство подвижной средой, вращающейся вместе с земной поверхностью.

Связанную с этой средой подвижную систему координат выберем, как указано на фиг. 112, направляя ось z по вертикали вверх, ось x—по касательной к меридиану к югу,



Фиг. 112.

а ось y — по касательной к параллели к востоку. За вертикаль мы примем направление линии отвеса в данном месте земной поверхности, то есть направление, принимаемое нитью с подвешенным на ней грузом. Вследствие эллипсоидальной формы земной поверхности и рассматриваемого влияния вращения Земли направление вертикали не будет проходить через центр Земли, а ось x не будет точно касательной к меридиану. Однако по малости этих отклонений мы будем ими пренебрегать.

Так как переносное ускорение, совпадающее с ускорением данной точки земной поверхности, направлено по радиусу параллели к оси вращения Земли, то переносная сила инерции будет направлена по этому же радиусу от оси вращения и будет являться центробежной силой. Она будет лежать в плоскости меридиана, то есть в плоскости (xz), имея две составляющие I_{ex} и I_{ez}. Если обозначить через φ угол широты данного места и через R — радиус Земли, то величина силы I_e будет

$$I_e = mw_e = mr\,\omega^2 = m\omega^2 R\cos\varphi,$$

где угловая скорость вращения Земли

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = \frac{\pi}{43200} \cong 0{,}0000729 \ 1/сек$$

есть весьма малая величина. Беря отношение силы I_e к силе тяжести, считая $R = 6370$ *км*, найдем

$$\frac{I_e}{mg} = \frac{\omega^2 R}{g} \cos\varphi \approx \frac{1}{289} \cos\varphi.$$

Таким образом, переносная сила инерции оказывается малой по сравнению с силой тяжести. А так как весы и всякие другие приборы, имеющие дело с силой тяжести, тоже испытывают на себе действие силы I_e, то удобно эту силу просто включить в силу тяжести, что всегда и делается на практике. При этом составляющая I_{ez}, направленная вертикально вверх и равная по величине

$$I_{ez} = I_e \cos\varphi = m\omega^2 R \cos^2\varphi$$

будет несколько уменьшать величину силы тяжести; так как I_{ez} имеет максимум на экваторе и монотонно убывает при перемещении к полюсу до нуля, то ускорение силы тяжести изменяется в обратном направлении, имея на экваторе минимум $g \cong 9{,}78$ *м/сек*^{2} и на полюсе — максимум $g \cong 9{,}82$ *м/сек*^{2}.

Влияние составляющей I_{ex} будет состоять в том, что она слабо отклоняет направление линии отвеса в северном полушарии к югу, а в южном—к северу. Принимая направление линии отвеса, как было уже сказано, за вертикаль данного места, тем самым учитывают влияние и этой составляющей. Так как

$$I_{ex} = I_e \sin\varphi = m\omega^2 R \sin\varphi \cos\varphi = \frac{m\omega^2 R}{2} \sin 2\varphi,$$

то максимум рассматриваемого отклонения, близкий, как показывают расчеты, к 6 дуговым минутам, достигается на широте $\varphi = 45°$.

В итоге векторное уравнение относительного движения материальной точки по отношению к земной поверхности, при действии на точку только силы тяжести, может быть взято в виде

$$m\boldsymbol{w}_r = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{I}_c. \qquad (6)$$

Установим еще влияние кориолисовой силы инерции I_c. Так как

$$\boldsymbol{I}_c = -m\boldsymbol{w}_c = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r),$$

где вектор угловой скорости вращения Земли $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль земной оси к северу, то направление этой силы зависит от направления вектора относительной скорости

точки v_r. Допустим, например, что точка движется по поверхности Земли к северу (фиг. 112). Снося вектор ω в рассматриваемую точку Земли, видим, что, согласно направлению векторного произведения, ускорение Кориолиса будет направлено по касательной к параллели к западу; следовательно, кориолисова сила инерции будет направлена по той же касательной к востоку, то есть вправо от направления движения точки. Легко убедиться, что это свойство направления силы I_c будет иметь место для любого направления движения точки вдоль земной поверхности в северном полушарии, с той только разницей, что сила I_c, как перпендикулярная плоскости векторов (v_r, ω) для направлений, отличных от меридионального, не будет касательной к земной поверхности.

Повторяя те же рассуждения, найдем, что в южном полушарии при том же движении точки по земной поверхности кориолисова сила инерции будет направлена влево от направления движения точки.

Этим действием кориолисовой силы инерции объясняется так называемый закон Бэра, говорящий о том, что в северном полушарии реки более подмывают правый берег, чем левый, а в южном—наоборот, причем этот закон особенно сказывается для рек, текущих в меридиональном направлении. Действием силы I_c объясняется также бо́льшая сношиваемость в северном полушарии правых рельсов, чем левых, а в южном—левых. То же влияние кориолисовой силы инерции приводит к появлению правой деривации снаряда в северном полушарии (помимо деривации, вызванной винтовой нарезкой ствола) и левой—в южном полушарии.

Как легко установить из фиг. 112, вектор ω имеет проекции на оси системы $Oxyz$:

$$\omega\cos\varphi,\ 0,\ \omega\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$I_c = -2m(\omega \times v_r) = 2m\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\omega\cos\varphi, & 0, & \omega\sin\varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}.$$

Поэтому проектируя уравнение (6) на выбранные подвижные оси координат, получаем дифференциальные уравнения относительного движения тяжелой материальной точки по отношению к земной поверхности в виде:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= R_x + 2m\omega\sin\varphi\cdot\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= R_y - 2m\omega\sin\varphi\cdot\dot{x} - 2m\omega\cos\varphi\cdot\dot{z}, \\ m\ddot{z} &= -mg + R_z + 2m\omega\cos\varphi\cdot\dot{y}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

6. Отклонение падающего тела от вертикали. Рассмотрим свободное падение тяжелой материальной точки. Так как никаких связей нет, то реакция $\boldsymbol{R} = 0$ и уравнения (7) после сокращения на m примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega \sin\varphi \cdot \dot{y}, \\ \ddot{y} &= -2\omega(\sin\varphi \cdot \dot{x} + \cos\varphi \cdot \dot{z}), \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\cos\varphi \cdot \dot{y}. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Начало подвижной системы координат возьмем в начальном положении точки. Считая также, что падение точки происходит без начальной скорости, имеем начальные условия:

при $t = 0$

$$\left.\begin{aligned} x &= y = z = 0, \\ \dot{x} &= \dot{y} = \dot{z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Интегрируя один раз записанные уравнения при этих начальных данных, находим

$$\dot{x} = 2\omega \sin\varphi \cdot y, \qquad (c)$$

$$\dot{y} = -2\omega(\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot z),$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega\cos\varphi \cdot y. \qquad (d)$$

При этом мы приняли $\varphi = \text{const}$, то есть пренебрегли ничтожно малым изменением широты для падающей точки вследствие наличия ее движения по оси x.

Подставляя значения $\dot{x}$ и $\dot{z}$ из (c) и (d) в (a), получаем следующее дифференциальное уравнение для y:

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y = 2\omega g \cos\varphi \cdot t.$$

Частное решение этого уравнения есть

$$y = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}\, t.$$

Поэтому общее решение будет

$$y = A\cos 2\omega t + B\sin 2\omega t + \frac{g\cos\varphi}{2\omega}\, t. \qquad (e)$$

Для определения произвольных постоянных A и B составляем производную

$$\dot{y} = 2\omega(-A\sin 2\omega t + B\cos 2\omega t) + \frac{g\cos\varphi}{2\omega}.$$

Тогда условия (b) для y и $\dot{y}$ дают

$$A = 0,\ B = -\frac{g\cos\varphi}{4\omega^2}.$$

После подстановки этих значений в (e) получаем

$$y = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}\left(t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right).$$

Разлагаем в этом выражении $\sin 2\omega t$ в ряд:

$$y = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}\left[t - \frac{1}{2\omega}\left(2\omega t - \frac{8\omega^3 t^3}{6} + \ldots\right)\right].$$

Отбрасывая члены выше третьего порядка относительно малой безразмерной величины ωt, находим с вполне достаточной точностью:

$$y = \frac{1}{3}\omega g\cos\varphi \cdot t^3. \qquad \text{(f)}$$

Подставляя это выражение в (c) и (d), имеем

$$\dot{x} = \frac{2}{3}\omega^2 g\sin\varphi\cos\varphi \cdot t^3,$$

$$\dot{z} = -gt + \frac{2}{3}\omega^2 g\cos^2\varphi \cdot t^3,$$

откуда, при условиях (b), получаем

$$x = \frac{1}{6}\omega^2 g\sin\varphi\cos\varphi \cdot t^4, \qquad \text{(g)}$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + \frac{1}{6}\omega^2 g\cos^2\varphi \cdot t^4.$$

Если бы мы считали Землю неподвижной, то закон свободного падения точки был бы, как известно,

$$x = y = 0,\ z = -\frac{gt^2}{2}.$$

Входящие в полученный закон относительного движения члены с ω представляют собой поправки к закону свободного падения точки, возникающие при учете вращения Земли вокруг своей оси. При этом выражения (f) и (g) дают отклонение падающей точки от вертикали. Как видим, выражение для x содержит, по сравнению с y, дополнительный малый множитель ωt. Поэтому основное отклонение дается выражением (f), что с учетом направления оси y говорит об отклонении падающей точки от вертикали к востоку.

Кроме того, согласно (g) точка испытывает также весьма малое отклонение к югу.

7. Маятник Фуко. Влияние вращения Земли можно наглядно видеть на вращении плоскости колебаний математического кругового маятника, подвешенного с помощью специального шарнира (шарнира Гука), не препятствующего этому вращению. Такой маятник называется маятником Фуко.

Оси подвижной системы отсчета $Oxyz$ берем так же, как и выше, помещая начало координат в точку подвеса (фиг. 113). Пусть $l = OM$ есть длина маятника. На маятник M помимо силы тяжести mg будет действовать направленная по нити к точке подвеса реакция N с проекциями на оси координат

$$-N\frac{x}{l}, \quad -N\frac{y}{l}, \quad -N\frac{z}{l},$$

где x, y, z — координаты маятника. Поэтому уравнения (7) запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -N\frac{x}{l} + 2m\omega\sin\varphi\cdot\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= -N\frac{y}{l} - 2m\omega(\sin\varphi\cdot\dot{x} + \cos\varphi\cdot\dot{z}), \\ m\ddot{z} &= -mg - N\frac{z}{l} + 2m\omega\cos\varphi\cdot\dot{y}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Будем рассматривать только малые колебания маятника. В таком случае координаты x и y будут малы в сравнении с длиной маятника l, и мы можем принять

$$z = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \approx -l,$$

откуда

$$\dot{z} = \ddot{z} = 0.$$

Отбрасывая в третьем уравнении (a) член с малой величиной ω, находим из него

$$N = mg.$$

Подставляя это значение, а также $\dot{z} = 0$ в первые два уравнения (a), получаем после сокращения на m:

$$\ddot{x} = -g\frac{x}{l} + 2\omega\sin\varphi\cdot\dot{y},$$

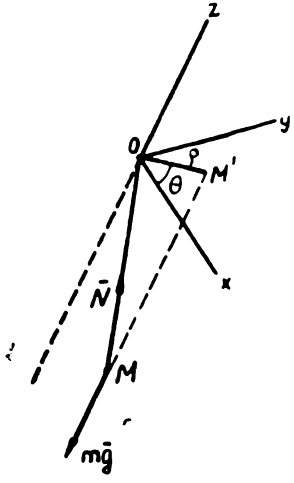
$$\ddot{y} = -g\frac{y}{l} - 2\omega\sin\varphi\cdot\dot{x}.$$

Умножая первое уравнение на y, второе—на x и вычитая из второго первое, будем иметь

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = -2\omega \sin\varphi\,(x\dot{x} + y\dot{y}). \qquad (b)$$

Введем полярные координаты ρ, Θ для проекции M' маятника M на плоскости (xy) (фиг. 113). Удвоенная секториальная скорость этой проекции будет

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2\dot{\Theta}.$$



Фиг. 113.

Поэтому

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\Theta}).$$

Кроме того,

$$x\dot{x} + y\dot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho^2}{2}\right).$$

Подставляя эти значения в (b), находим

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\Theta}) = -\omega \sin\varphi \frac{d}{dt}(\rho^2),$$

что после интегрирования дает

$$\rho^2\dot{\Theta} = -\omega \sin\varphi \cdot \rho^2 + C.$$

При прохождении маятника через положение равновесия имеем $\rho = 0$, откуда $C = 0$. После сокращения на ρ^2 находим

$$\dot{\Theta} = -\omega \sin\varphi.$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$\Theta = \Theta_0 - \omega \sin\varphi \cdot t.$$

Так как угол Θ определяет положение плоскости качаний маятника в данный момент, то полученный результат говорит о том, что плоскость качаний маятника будет непрерывно поворачиваться в сторону уменьшения угла Θ. Из фиг. 113 видно, что это уменьшение означает непрерывное вращение плоскости качаний вокруг вертикали от востока через юг к западу. Полный оборот произойдет за промежуток времени T, находимый из соотношения

$$T|\dot{\Theta}| = 2\pi$$

или

$$T\omega \sin\varphi = 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sin\varphi}.$$

Рассмотренное явление называется *эффектом Фуко*. Интенсивность этого эффекта зависит от широты места, увеличиваясь от экватора к полюсу. При этом на экваторе, где $\varphi = 0$ $\Theta = \Theta_0$, эффект Фуко отсутствует. На полюсе же, то есть при $\varphi = 90°$, эффект становится наиболее заметным: там

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

а так как

$$\omega = \frac{2\pi}{T_1},$$

где T_1 — время полного оборота Земли вокруг своей оси, то есть одни сутки, то

$$T = T_1.$$

Таким образом, на полюсе полный оборот плоскости качаний маятника происходит за одни сутки, а на остальных широтах за время

$$T = \frac{T_1}{\sin\varphi}.$$

§ 29. Основы релятивистской механики

1. Специальный принцип относительности. В основе классической механики лежит ряд постулатов, установленных на основе нашего повседневного опыта и некоторых общих соображений философского характера. К числу этих постулатов относятся:

1) понятия об абсолютном пространстве и абсолютном времени и вытекающие из них:

а) представление о независимости течения времени от движения тел;

в) независимость массы и линейных размеров тел от их движения;

с) мгновенность передачи любых взаимодействий от одного тела к другому;

2) получение любых сложных движений из простейших путем применения теоремы сложения скоростей, откуда вытекает возможность получения сколь угодно больших скоростей движущихся тел.

Однако, как мы говорили, уже принцип относительности, установленный Галилеем, оказался в несоответствии с представлением абсолютного пространства. В дальнейшем стали подвергаться сомнению и другие из вышеприведенных по-

стулатов классической механики, поскольку их справедливость была установлена на основании опыта, ограниченного сравнительно малыми скоростями движения тел, наблюдаемыми в условиях обычной земной действительности.

Передовая философская мысль в лице диалектического материализма во второй половине XIX в. отбросила ньютоновское представление об абсолютности пространства и времени и независимости их существования от движущейся материи. Она установила единство пространства и времени, а также их неразрывную связь с материей и ее движением, показав, что они являются формами существования материи.

В последней четверти XIX в. экспериментально была доказана несправедливость и других указанных выше положений классической механики. Оказалось, что в природе нет мгновенной передачи взаимодействия от одного тела к другому и всякое такое взаимодействие может передаваться со скоростью, не превышающей скорости света c в пустоте, равной 299792 *км/сек* $\approx$ 300000 *км/сек*. Скорость света оказалась также предельной скоростью движения любых тел. Было установлено весьма важное положение о независимости скорости света от движения наблюдателя или источника света.

Эти и некоторые другие результаты позволили Эйнштейну сформулировать в 1905 году свой *специальный принцип относительности* или *аксиому эквивалентности*. Этот принцип представляет собой обобщение принципа относительности классической механики и состоит из следующих двух положений:

а) *все физические явления происходят одинаково в любых системах отсчета, движущихся инерциально относительно друг друга*;

в) *луч света движется с одной и той же скоростью с относительно всякой инерциальной системы отсчета и притом независимо от того, движется или покоится источник света по отношению к данной системе.*

2. Преобразование Галилея. Обозначим оси координат некоторой системы отсчета S через x_1, x_2, x_3 и рассмотрим переход от системы S к системе $S'(x_1', x_2', x_3')$, полученной поворотом осей вокруг начала координат. Тогда, как известно, координаты какой-либо точки в новых осях выразятся через старые координаты формулами

$$x_k' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{kj} x_j \quad (k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где α_{kj} — направляющие косинусы осей одной системы относительно осей другой, характеризуемые схемой:

	x_1	x_2	x_3
x'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
x'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
x'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Подставляя выражения (1) в условие инвариантности радиуса-вектора точки

$$\sum_{\kappa=1}^{3} x'^2_{\kappa} = \sum_{j=1}^{3} x_j^2, \tag{2}$$

найдем из получаемого тождества известные соотношения между направляющими косинусами:

$$\sum_{\kappa=1}^{3} \alpha_{\kappa j}^2 = 1, \quad \sum_{\kappa=1}^{3} \alpha_{\kappa j}\alpha_{\kappa h} = 0 \quad (j, h = 1,2,3;\ h \neq j). \tag{3}$$

Обратный переход приведет к соотношениям:

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{\kappa j}^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^{3} \alpha_{\kappa j}\alpha_{hj} = 0 \quad (\kappa, h = 1,2,3;\ h \neq \kappa). \tag{3'}$$

Условие (2) совместно с (3) или (3') определяет так называемое ортогональное преобразование координат.

Пусть теперь система S' в момент $t = 0$ начала двигаться относительно системы S инерциально, то есть с некоторой постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$, при сохранении направления своих осей. К моменту времени t вектор перемещения начала O' системы S' (фиг. 114) будет равен $\boldsymbol{v}t$, так что радиусы-векторы какой-либо точки M в обеих системах будут связаны равенством

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t. \tag{4}$$

Обозначим через $\alpha_{\kappa 4}\,(\kappa = 1,2,3)$ проекции вектора $-\boldsymbol{v}$ на оси S'. Проектируя (4) на эти оси, получим

$$x'_{\kappa} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{\kappa j} x_j + \alpha_{\kappa 4} t \ \ (\kappa = 1,2,3). \tag{5}$$

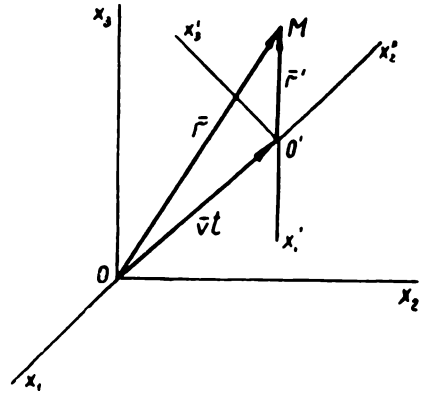
Так как время в классической механике считается абсолютным, то к равенствам (5) следует еще добавить соотношение

$$t' = t, \tag{5'}$$

говорящее об одинаковом течении времени в обеих системах.

Формулы (5) и (5′) являются формулами перехода от координат точки и времени, отсчитываемых в одной системе, к координатам и времени в другой. Если ввести в рассмотрение четырехмерное пространство координат и времени, то точку этого пространства принято называть *событием*. Тогда (5) и (5′) можно рассматривать как формулы перехода от одной системы отсчета к другой.

Так как система S' движется относительно S инерциально, то для движения точки по отношению к каждой из



Фиг. 114.

систем справедлив принцип относительности Галилея, что видно и из (4), откуда имеем $\ddot{\bar{r}}' = \ddot{\bar{r}}$, то есть ускорение точки относительно каждой из систем одно и то же. Поэтому преобразование (5), (5′) называется преобразованием Галилея. Оно определяется таблицей коэффициентов

	x_1	x_2	x_3	t
x_1'	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
x_2'	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
x_3'	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}
t'	0	0	0	1

(6)

При этом остаются справедливыми формулы (3) и (3′) для направляющих косинусов.

Если оси системы S' взять параллельными осям системы S, то $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$, а все остальные косинусы обратятся в нуль. Пусть, кроме того, система S' движется относительно S вдоль оси x_3; тогда $\alpha_{34} = -v$, $\alpha_{14} = \alpha_{24} = 0$, и преобразование Галилея принимает вид:

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3 - vt, \quad t' = t. \tag{7}$$

Обратно можно рассматривать движение системы S относительно S' как происходящее со скоростью $-v$ вдоль оси x_3'. Поэтому формулы обратного преобразования координат получаются из (7) простой заменой v на $-v$.

3. Преобразование Лоренца. Легко убедиться, что преобразование Галилея противоречит специальному принципу относительности. В самом деле, возьмем источник света, расположенный в начале системы S. Тогда из этой точки во все стороны будут распространяться сферические световые волны, движущиеся со скоростью c. Если поэтому $\boldsymbol{r}$ есть радиус-вектор какой-нибудь точки световой волны, то вектор скорости этой точки есть $\dot{\boldsymbol{r}} = c\boldsymbol{r}^\circ$, где $\boldsymbol{r}^\circ$ — единичный вектор направления $\boldsymbol{r}$. Согласно же (4)

$$\dot{\boldsymbol{r}}' = \dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{v},$$

и скорость световой волны в системе S' будет

$$\dot{\boldsymbol{r}}' = c\boldsymbol{r}^\circ - \boldsymbol{v},$$

то есть окажется иной, чем в системе S, и притом различной для разных направлений, что как раз и противоречит принципу Эйнштейна.

Поэтому преобразование Галилея должно быть заменено другим, сохраняющим скорость света постоянной во всех инерциальных системах. Такое преобразование было дано в конце прошлого века голландским физиком Лоренцом и носит его имя.

Представим себе, что из общего начала обеих систем в момент времени $t = t' = 0$ исходит световой импульс. Тогда в каждой системе отсчета начнут распространяться сферические световые волны с уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= c^2t^2, \\ x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 &= c^2t'^2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

соответственно, где c имеет одно и то же значение.

Если формально ввести мнимую координату $x_4 = ict$, то уравнения (8) можно записать в виде

$$\sum_{\kappa=1}^{4} x_\kappa^2 = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{4} x_\kappa'^2 = 0. \tag{9}$$

Четырехмерное пространство x_1, x_2, x_3, x_4 часто называют *пространством Минковского*. Считая четвертую координату x_4 равноправной с остальными, можем взять общую схему преобразования Лоренца в виде

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1'	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
x_2'	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
x_3'	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}
x_4'	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}

(10)

При этом преобразовании, в силу независимости скорости света от системы отсчета, каждое из уравнений (9) должно быть следствием другого. А так как формулы преобразования линейны, то связь между левыми частями уравнений (9) возможна лишь в форме

$$\sum_{\kappa=1}^{4} x_\kappa'^2 = \lambda \sum_{\kappa=1}^{4} x_\kappa^2,$$

то есть в форме пропорциональности одного выражения другому. Но из равноправия систем отсчета следует, что, в свою очередь, должно быть

$$\sum_{\kappa=1}^{4} x_\kappa^2 = \lambda \sum_{\kappa=1}^{4} x_\kappa'^2$$

—при том же значении λ. Следовательно, $\lambda = 1$ и

$$\sum_{\kappa=1}^{4} x_\kappa'^2 = \sum_{\kappa=1}^{4} x_\kappa^2. \tag{11}$$

Таким образом, в релятивистской механике переход от системы S к системе S' и обратно должен происходить по схеме (10), причем формулы преобразования координат должны удовлетворять условию (11). Последнее же усло-

вие аналогично условию (2) ортогонального преобразования трехмерного пространства, так что здесь мы имеем дело с таким же преобразованием пространства Минковского.

Подставляя в (11) выражения

$$x'_\kappa = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{\kappa j} x_j \quad (\kappa = 1, 2, 3, 4), \tag{12}$$

из получаемого тождества найдем для коэффициентов $\alpha_{\kappa j}$:

$$\sum_{\kappa=1}^{4} \alpha_{\kappa j}^2 = 1, \quad \sum_{\kappa=1}^{4} \alpha_{\kappa j}\alpha_{\kappa h} = 0 \quad (j, h = 1, 2, 3, 4;\ h \neq j), \tag{13}$$

а при обратном преобразовании:

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_{\kappa j}^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^{4} \alpha_{\kappa j}\alpha_{h j} = 0 \quad (\kappa, h = 1, 2, 3, 4;\ h \neq j). \tag{13'}$$

Для получения наглядного представления рассмотрим частное преобразование Лоренца, при котором две из пространственных координат остаются постоянными. Пусть, например,

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2.$$

Это означает, что, как и при получении формул (7), оси систем S и S' параллельны между собой, и движение S' происходит вдоль оси x_3. Тогда в первом и втором вертикальных и горизонтальных рядах схемы (10) исчезнут все $\alpha_{\kappa j}$, кроме

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1,$$

и эта схема примет вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x'_1	1	0	0	0
x'_2	0	1	0	0
x'_3	0	0	α_{33}	α_{34}
x'_4	0	0	α_{43}	α_{44}

(14)

Соотношения (13') дают следующие три условия:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{33}^2 + \alpha_{34}^2 &= 1, \\ \alpha_{43}^2 + \alpha_{44}^2 &= 1, \\ \alpha_{33}\alpha_{43} + \alpha_{34}\alpha_{44} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{а}$$

Для определения четырех коэффициентов, входящих в эти уравнения, необходимо иметь еще одно уравнение. Оно получится из того, что начало системы S', совпадавшее в начальный момент с началом системы S, движется вдоль оси x_3 со скоростью v. Поэтому в момент t его координата x_3 будет

$$x_3 - vt = \frac{v}{ic} x_4 = -i\beta x_4,$$

где

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

В то же время для начала S' имеем

$$x_3' = \alpha_{33} x_3 + \alpha_{34} x_4 = 0.$$

Подставляя сюда x_3, получаем

$$x_4 (-i\beta\alpha_{33} + \alpha_{34}) = 0,$$

откуда

$$\alpha_{34} = i\beta\alpha_{33}.$$

Подстановка этого выражения в первое уравнение (а) дает

$$\alpha_{33}^2 (1 - \beta^2) = 1,$$

откуда

$$\alpha_{33} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \alpha_{34} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Знак плюс у α_{33} берется из того соображения, что при малых по сравнению с c скоростях, то есть при $\beta \approx 0$, преобразование Лоренца должно переходить в преобразование Галилея, для которого согласно (7) $\alpha_{33} = 1$.

Далее из третьего уравнения (а) имеем

$$\alpha_{43} = -\frac{\alpha_{44}\alpha_{41}}{\alpha_{33}} = -i\beta\alpha_{41}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (а), получаем

$$\alpha_{44}^2 (1 - \beta^2) = 1,$$

откуда

$$\alpha_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \alpha_{34} = -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Знак плюс у α_{44} берется опять по той причине, что для преобразования Галилея согласно (7) $\alpha_{44} = 1$.

Таким образом, если ввести обозначение

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

окончательная схема преобразования Лоренца будет:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1'	1	0	0	0
x_2'	0	1	0	0
x_3'	0	0	α	$i\alpha\beta$
x_4'	0	0	$-i\alpha\beta$	α

Поэтому

$$x_3' = \alpha(x_3 + i\beta x_4),$$

$$x_4' = \alpha(x_4 - i\beta x_3).$$

Учитывая еще, что

$$x_4 = ict,\ x_4' = ict',\ \beta c = v,$$

и подставляя значение α, можем формулы преобразования Лоренца записать в виде:

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = \frac{x_3 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_3}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (15)$$

Таким образом, преобразование Лоренца получено нами в результате отбрасывания ньютоновского представления об абсолютности времени и отказа от исключительного положения временной координаты по сравнению с пространственными, как это имеет место в схеме Галилея (6).

При скорости движения v, малой в сравнении со скоростью света c, можем положить $\beta = 0$, что дает преобразование Галилея (7). Следовательно, преобразование Галилея при небольших скоростях является достаточно точным.

Переходя к обычному обозначению координат, получаем следующий вид преобразования Лоренца:

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}z}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (16)$$

Из равноправности систем отсчета S и S' и из того, что система S движется относительно системы S' вдоль оси z' (или x_3') со скоростью $-v$, вытекает, что формулы обратного преобразования Лоренца будут:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = \frac{z' + vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} z'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{17}$$

4. Некоторые эффекты специальной теории относительности. Преобразование Лоренца приводит к эффектам, кажущимся парадоксальными с точки зрения наших обычных представлений. Рассмотрим некоторые из них.

а. Сжатие движущихся тел. Пусть в системе S' покоится стержень, имеющий длину l' в этой системе и расположенный параллельно оси z'. Тогда его длина есть

$$l' = z_2' - z_1',$$

где z_1' и z_2' — координаты его концов в системе S' в момент времени t', причем $z_2' > z_1'$.

Наблюдателю, находящемуся в системе S, в соответствующий момент времени t длина стержня будет казаться равной

$$l = z_2 - z_1.$$

Заменяя в l' значения z' по третьей формуле (16), найдем

$$l' = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда

$$l = l' \sqrt{1-\beta^2}.$$

Таким образом, из системы S стержень кажется укороченным в отношении $1 : \sqrt{1-\beta^2}$. При стремлении скорости v системы S' к скорости света c, то есть при $\beta \to 1$, кажущаяся длина стержня l будет стремиться к нулю.

b. Замедление процессов. Пусть в системе S' в точке с координатой z' происходит некоторое событие в момент времени t_1', повторяющееся в той же точке в момент t_2', то есть через промежуток времени $T' = t_2' - t_1'$.

Этим событиям в системе S отвечают события (z_1, t_1) и (z_2, t_2) с промежутком времени между ними $T = t_2 - t_1$. Беря t_1 и t_2 по последней формуле (17) и учитывая, что для обоих событий $z' = \text{const}$, находим:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{18}$$

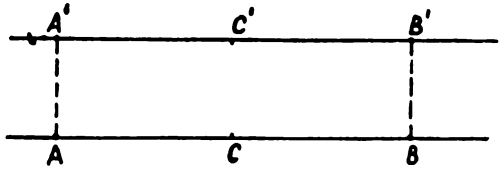
Таким образом, в системе S промежуток времени окажется большим, то есть часы будут идти более медленно. Это явление носит еще название „растяжения времени".

При $v = c\,(\beta = 1)$ имеем $T = \infty$; следовательно, из системы S всякий измеритель времени в S' будет казаться неработающим.

Необходимо, однако, заметить, что вследствие равноправности обеих систем из системы S' всякие часы в S будут казаться тоже идущими медленнее. Точно так же наблюдатель, находящийся в S', будет видеть всякий покоящийся в S предмет сжатым в направлении относительного движения этой системы.

с. Относительность понятия одновременности. В классической механике, где время считается текущим одинаково во всех системах отсчета, понятие одновременности двух событий, происходящих на каком-либо расстоянии друг от друга, рассматривается как очевидное, ибо во всех системах отсчета всякие измерители времени (часы) должны идти одинаковым образом. Легко установить, что из постулата Эйнштейна вытекает невозможность такой абсолютной одновременности. Это можно показать на следующем примере, данном самим Эйнштейном.

Считая по-прежнему, что относительное движение инерциальных систем S и S' происходит вдоль оси z (или z'), возьмем два события, происходящие в точках A и B оси z (фиг. 115) системы S. Наблюдатель, находящийся в средней точке C расстояния AB, будет считать эти события одно-



Фиг. 115.

временными, если световые сигналы, выпущенные из A и B в моменты времени, отвечающие событиям, достигнут его в одно и то же время.

Пусть теперь C' — середина отрезка $A'B'$, связанного с системой S' и совпадавшего с отрезком AB в момент выхода сигналов из A и B. До наблюдателя в C', движущегося вместе с системой S' по направлению к B, сначала дойдет сигнал, вышедший из B, сигнал же из A придет с некоторым запозданием вследствие большей величины пути, проходимого световым лучом. В то же время, как и в системе S, приход сигналов в точку, лежащую в середине $A'B'$, в один и тот же момент времени является един-

ственным возможным критерием одновременности указанных событий. А так как наблюдатель в C' с таким же правом, как и наблюдатель в C, может считать свою систему неподвижной по отношению к источникам света, то события, одновременные для наблюдателя в одной инерциальной системе, окажутся неодновременными для наблюдателя в другой системе.

К тому же результату можно прийти из формул преобразования Лоренца. Пусть в системе S' имеются два одновременных события (z_1', t') и (z_2', t'). В системе S им будут отвечать события (z_1, t_1) и (z_2, t_2). Из последней формулы (17) получаем

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} \frac{z_2' - z_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0.$$

Следовательно, в системе S события оказываются неодновременными.

Установленные эффекты при обычных земных скоростях оказываются исчезающе малыми вследствие большой величины скорости света. Пусть, например, системой S' является реактивный самолет, летящий со скоростью $v = 1080$ *км/час*. Тогда скорость в секунду будет

$$v = \frac{1080}{3600} \text{ км/сек} = 0{,}3 \text{ км/сек}.$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0{,}3}{3 \cdot 10^5} = 10^{-6}, \quad \beta^2 = 10^{-12}$$

и

$$\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-10^{-12}}.$$

Эта величина столь мало отличается от единицы, что получающееся различие длин и промежутков времени на земле и в самолете нельзя установить никакими современными приборами.

Эффекты становятся заметными лишь при скоростях, составляющих достаточно значительную часть от скорости света.

В заключение заметим, что преобразование Лоренца говорит также о невозможности движения какого-либо тела с относительной скоростью, превышающей скорость света c. В самом деле, если бы тело двигалось со скоростью $v > c$ относительно некоторой системы S, то, принимая тело за систему S', мы бы нашли, что $\beta > 1$, и преобразование Лоренца дало бы мнимые значения для координат и времени в другой системе.

5. Собственное время и четырехмерная скорость. Представим себе материальную точку, покоящуюся в системе S' и движущуюся вместе с ней. Тогда в формуле (18)

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

T' представит собой время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с точкой. Если поэтому промежутки времени отсчитывать от общего начального момента, то, полагая $T' = \tau$, получим

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где τ — время в самой движущейся точке, называемое *собственным временем*.

Дифференцирование дает

$$d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\, dt. \tag{19}$$

При перемещении точки в обычном трехмерном пространстве отвечающая ей точка в пространстве Минковского описывает траекторию, называемую *мировой линией*. Четырехмерный вектор с проекциями

$$dx_1,\ dx_2,\ dx_3,\ dx_4 = icdt$$

есть вектор элементарного перемещения точки вдоль мировой линии, а вектор $\boldsymbol{u}$, определяемый проекциями

$$\frac{dx_1}{d\tau},\ \frac{dx_2}{d\tau},\ \frac{dx_3}{d\tau},\ ic\frac{dt}{d\tau}, \tag{20}$$

явится четырехмерным вектором скорости точки. Последние выражения согласно (19) можно записать еще в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dx_\kappa}{dt}\ (\kappa = 1, 2, 3),\qquad \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{20'}$$

Первые три проекции можно назвать пространственными компонентами вектора $\boldsymbol{u}$, переходящими при $\beta \to 0$ в проекции вектора $\boldsymbol{v}$ скорости точки на оси системы S

$$v_\kappa = \frac{dx_\kappa}{dt}\ (\kappa = 1, 2, 3). \tag{21}$$

6. Уравнение движения. В свое время Ньютон дал формулировку основного закона динамики не в принятой нами форме, а в форме теоремы о количестве движения, то есть в виде

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на материальную точку.

В релятивистской динамике уравнение (22) тоже принимается за аксиому, справедливую для трехмерного пространства, с которым связана система отсчета S.

Распространяя закон (22) на четырехмерное пространство Минковского, запишем его в собственном времени точки τ. Так как τ является также и временем в системе S', относительно которой точка покоится, то, не предрешая вопроса о характере массы в общем случае, мы должны считать сейчас массу равной некоторой постоянной величине m_0, которую назовем *массой покоя*. Вектору скорости точки $\boldsymbol{v}$ в пространстве Минковского будет отвечать четырехмерный вектор $\boldsymbol{u}$ с проекциями (20) или (20′). Поэтому основной закон динамики для этого пространства примет вид

$$\frac{d}{d\tau}(m_0\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Phi}. \tag{23}$$

где $\boldsymbol{\Phi}$ есть четырехмерный вектор, представляющий собой обобщение понятия силы на пространство Минковского; он имеет размерность силы и может быть назван *силой Минковского*.

Проектируя (23) на оси системы S, получаем согласно (20′) и (21) пространственную часть уравнения (23) в виде следующих проекций:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{m_0 v_\kappa}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Phi_\kappa$$

или, заменяя $d\tau$ из (19):

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 v_\kappa}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Phi_\kappa\sqrt{1-\beta^2} \quad (\kappa = 1, 2, 3).$$

Эти уравнения должны совпасть с проекциями уравнения (22), из чего заключаем, что

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24}$$

и

$$F_\kappa = \Phi_\kappa\sqrt{1-\beta^2}. \tag{25}$$

Выражение (24) носит название *релятивистской массы* точки. Оно говорит о том, что масса точки является функцией скорости, возрастающей вместе с ней (то есть с ростом β) и стремящейся к бесконечности, когда эта скорость приближается к скорости света.

Формула (25) дает пространственные компоненты силы Минковского в виде

$$\Phi_\kappa = \frac{F_\kappa}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\kappa = 1, 2, 3). \tag{26}$$

7. Энергия и масса. Возьмем уравнение (23) и умножим его скалярно на вектор $\boldsymbol{u}$. Так как

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{2}\right) = \frac{d}{d\tau}\,\frac{u^2}{2},$$

то в результате умножения получим

$$\frac{d}{d\tau}\,\frac{m_0 u^2}{2} = \Phi\cdot\boldsymbol{u}. \tag{а}$$

В то же время из выражений (20′) и (21) имеем:

$$u^2 = \frac{1}{1-\beta^2}\left(\sum_{\kappa=1}^{3} v_\kappa^2 - c^2\right) = \frac{v^2 - c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -c^2.$$

Следовательно, u^2 есть постоянная величина, и из уравнения (а) находим

$$\Phi\cdot\boldsymbol{u} = 0,$$

или

$$\sum_{\kappa=1}^{4} \Phi_\kappa u_\kappa = 0.$$

Согласно тем же выражениям (20′) и (21) это дает

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{\kappa=1}^{3}\Phi_\kappa v_\kappa + \frac{ic\,\Phi_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0,$$

что на основании (26) можно переписать в форме

$$\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{1-\beta^2} + ic\,\frac{\Phi_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0.$$

Отсюда четвертая составляющая силы Минковского будет

$$\Phi_4 = \frac{i}{c}\,\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Следовательно, четвертое дифференциальное уравнение движения точки

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u_4) = \Phi_4,$$

отвечающее четвертому измерению пространства Минковского, на основании последнего выражения (20′) и формулы (19), может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}.$$

В правой части этого равенства стоит мощность или работа силы, отнесенная к единице времени. Как мы знаем, по теореме кинетической энергии, она должна равняться приращению кинетической энергии, тоже отнесенной к единице времени. Мы, однако, пока не знаем, как следует определять кинетическую энергию в релятивистской динамике, поэтому будем говорить просто об энергии движения точки E. Тогда

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{dE}{dt}. \tag{27}$$

Сличая это выражение с предыдущим равенством, находим, что с точностью до аддитивной постоянной

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2. \tag{28}$$

Упомянутую постоянную принято отбрасывать и считать энергию движения определяющейся формулой (28), ибо только при этом условии удалось создать стройную релятивистскую динамику, подтверждаемую экспериментом.

Считая β^2 малым по сравнению с единицей, разлагаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1 \quad \beta^2)^{-1/2}$$

в ряд Маклорена и отбрасываем члены выше первой степени относительно β^2. Тогда получим

$$E = m_0c^2(1+\frac{\beta^2}{2}) = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2.$$

Отсюда следует, что даже покоящаяся точка имеет энергию

$$E_0 = m_0c^2, \tag{29}$$

называемую *энергией покоя*, дополняющуюся при движении ньютонианской кинетической энергией

$$\frac{1}{2}m_0v^2.$$

Если данное материальное тело свободно от действия сил, то согласно (27)

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$

и энергия движения точки должна оставаться постоянной. Тогда при изменении кинетической энергии тела, возникающем, например, вследствие химической реакции, взрыва и других протекающих внутри тела процессов, должно измениться в противоположном направлении другое слагаемое, входящее в E, то есть энергия покоя E_0. Последнее же может произойти только за счет изменения массы покоя m_0. Таким образом, в этом случае мы будем иметь вместе с изменением массы покоя параллельное изменение энергии покоя.

Многие буржуазные ученые трактовали этот переход как исчезновение материи или ее появление из „ничего". В действительности же это явление имеет совсем иной смысл. Современная физика считает, что всякого рода электрические магнитные, гравитационные и другие силовые поля представляют собой особую форму материи. Поэтому, например, уменьшение массы покоя какого-либо тела означает не исчезновение материи, а переход некоторой ее части, существующей в форме „вещества", в другую ее форму — форму поля.

Формула (29) получила название закона эквивалентности массы и энергии. Заметим, что обычно изменение массы покоя оказывается ничтожно малым. Даже при таком явлении, как взрыв современной атомной бомбы, несмотря на колоссальную энергию, выделяющуюся при взрыве, уменьшение массы бомбы не превышает одной тысячной ее первоначальной величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики, часть I, М., изд. «Наука», 1965.
2. Г. К. Суслов. Теоретическая механика, М.-Л., Гостехиздат, 1946.
3. Ш. Ж. Валле-Пуссен. Лекции по теоретической механике, т. I, М., Гос. изд. ин. лит., 1948.
4. П. Аппель. Теоретическая механика, т. I, М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960.
5. Г. Леви-Чивита и У. Амальди. Курс теоретической механики, т. I, части 1 и 2, т. II, часть 1, Изд. ин. лит., 1951, 1952.
6. Н. В. Розе (под ред.). Теоретическая механика, части 1 и 2, Л., Гос. тех.-теорет. изд., 1932 и 1933.
7. Г. Гольдстейн. Классическая механика, М., Гос. изд. тех.-теор. лит., 1957.
8. Н. Е. Жуковский. Теоретическая механика, М.-Л., Гос. изд. тех.-теор. лит., 1952.

Евгений Дмитриевич Томилов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, Ч. I.

Томск, изд. ТГУ, 1966 г. 304 с.

Редактор издательства **Л. Г. Мордовина**
Технический редактор **А. С. Бобренок**
Корректор **Л. С. Тураева**

К300250 Сдано в набор 24/VIII-65 г. Подписано к печати 6/III-66 г.
Формат 60×92 1/16; печ. л. 19; уч.-изд. л. 19.
Заказ 6070. Тираж 7000 экз. Цена 1 руб. 10 коп.

Томск, Издательство ТГУ, проспект Ленина, 34,
Областная типография № 1 Управления по печати, ул. Советская, 47.